Definición de los espacios L^p, $1 \leq p < +\infty$

(un tema de la unidad "Espacios L^p")

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

17 de octubre de 2022

Plan

Objetivo:

- estudiar la definición de los espacios $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ y $L^p(X,\mu)$, para $1 \leq p < +\infty$.

Objetivo:

- estudiar la definición de los espacios $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ y $L^p(X,\mu)$, para $1 \leq p < +\infty$.

Prerrequisitos:

- la seminorma extendida N_p, $1 \leq p < +\infty$;
- espacios cocientes de espacios normados y seminormados.

Aplicaciones

- El espacio L^2 surge de manera natural en varios modelos de física, especialmente de la mecánica cuántica.
  La razón informal: la energía cinética involucra el cuadrado.

- El espacio L^1 es natural para estudiar la convolución y sus aplicaciones.

- El espacio L^∞ es un ejemplo típico de álgebra de von Neumann.

Funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

Funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ o brevemente $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$: funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$.

Funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ o brevemente $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$: funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ es un espacio vectorial complejo respecto a las operaciones punto a punto:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

Funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ o brevemente $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$: funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ es un espacio vectorial complejo respecto a las operaciones punto a punto:

$$(f + g)(x) \coloneqq f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) \coloneqq \lambda f(x).$$

El vector cero de este espacio es la función constante cero 0_X.

Repaso: la seminorma extendida N_p, $1 \le p < +\infty$

Sea $p \in [1, +\infty)$. Definimos $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}) \to [0, +\infty]$,

$$N_p(f) := \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

Repaso: la seminorma extendida N_p, $1 \le p < +\infty$

Sea $p \in [1, +\infty)$. Definimos $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}) \to [0, +\infty]$,

$$N_p(f) := \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

Sabemos que N_p es absolutamente homogénea:

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \forall f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}) \qquad N_p(\lambda f) = |\lambda| \, N_p(f).$$

Repaso: funciones que se anulan casi en todas partes

$$\mathcal{Z}(X,\mu) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mu) : \quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X \right\}.$$

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F})$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

Repaso: funciones que se anulan casi en todas partes

$$\mathcal{Z}(X, \mu) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mu) : \quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X \right\}.$$

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \in \mathcal{Z}(X, \mu).$$

Repaso: la desigualdad de Minkowski para funciones medibles

Teorema

Sean $p \in [1, +\infty)$, $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$. Entonces

$$N_p(f + g) \leq N_p(f) + N_p(g).$$

Plan

Espacio $\mathcal{L}^p(X,\mu)$

Nos restringimos a las funciones en las cuales la seminorma N_p es finita:

$$\mathcal{L}^p(X,\mu) := \Big\{ f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F}) : \quad N_p(f) < +\infty \Big\}.$$

Espacio $\mathcal{L}^p(X,\mu)$

Nos restringimos a las funciones en las cuales la seminorma N_p es finita:

$$\mathcal{L}^p(X,\mu) := \Big\{ f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F}) : \quad N_p(f) < +\infty \Big\}.$$

Denotamos por $\widetilde{N}_p$ la restricción de N_p a $\mathcal{L}^p(X,\mu)$.

Espacio $\mathcal{L}^p(X,\mu)$

Nos restringimos a las funciones en las cuales la seminorma N_p es finita:

$$\mathcal{L}^p(X,\mu) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F}) : \quad N_p(f) < +\infty \right\}.$$

Denotamos por $\widetilde{N}_p$ la restricción de N_p a $\mathcal{L}^p(X,\mu)$.

El espacio $\left(\mathcal{L}^p(X,\mu), \widetilde{N}_p\right)$ es seminormado.

Funciones que se anulan μ-c.t.p.

$$\mathcal{Z}(X,\mu) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mu)\colon \quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X \right\}.$$

Funciones que se anulan μ-c.t.p.

$$\mathcal{Z}(X,\mu) \coloneqq \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mu) \colon \quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X \right\}.$$

Como ya vimos, $\quad \{ f \in \mathcal{L}^p(X,\mu) \colon \; \widetilde{N}_p(f) = 0 \} \; = \; \mathcal{Z}(X,\mu).$

Funciones que se anulan μ-c.t.p.

$$\mathcal{Z}(X,\mu) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mu) \colon \quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X \right\}.$$

Como ya vimos, $\{f \in \mathcal{L}^p(X,\mu) \colon \ \widetilde{N}_p(f) = 0\} \ = \ \mathcal{Z}(X,\mu)$.

Ejercicio. Sean $f, g \in \mathcal{M}(X,\mu)$ tales que $f - g \in \mathcal{Z}(X,\mu)$. Mostrar que

$$N_p(f) = N_p(g).$$

Funciones que se anulan μ-c.t.p.

$$\mathcal{Z}(X,\mu) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mu) \colon \quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X \right\}.$$

Como ya vimos, $\{f \in \mathcal{L}^p(X,\mu) \colon \ \widetilde{N}_p(f) = 0\} \ = \ \mathcal{Z}(X,\mu)$.

Ejercicio. Sean $f, g \in \mathcal{M}(X,\mu)$ tales que $f - g \in \mathcal{Z}(X,\mu)$. Mostrar que

$$N_p(f) = N_p(g).$$

Ejercicio. Mostrar que $\mathcal{Z}(X,\mu)$ es cerrado en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$.

Espacio $L^p(X,\mu)$

$$L^p(X,\mu) := \mathcal{L}^p(X,\mu)/\mathcal{Z}(X,\mu).$$

Espacio $L^p(X, \mu)$

$$L^p(X, \mu) := \mathcal{L}^p(X, \mu)/\mathcal{Z}(X, \mu).$$

La norma en $L^p(X, \mu)$ se define como

$$\|F\|_p := \inf_{f \in F} N_p(f).$$

Espacio $L^p(X, \mu)$

$$L^p(X,\mu) := \mathcal{L}^p(X,\mu)/\mathcal{Z}(X,\mu).$$

La norma en $L^p(X, \mu)$ se define como

$$\|F\|_p := \inf_{f \in F} N_p(f).$$

En realidad, si $\quad g - f \in \mathcal{Z}(X,\mu), \quad$ entonces $\quad N_p(g) = N_p(f).$

Espacio $L^p(X,\mu)$

$$L^p(X,\mu) := \mathcal{L}^p(X,\mu)/\mathcal{Z}(X,\mu).$$

La norma en $L^p(X,\mu)$ se define como

$$\|F\|_p := \inf_{f\in F} N_p(f).$$

En realidad, si $\quad g - f \in \mathcal{Z}(X,\mu), \quad$ entonces $\quad N_p(g) = N_p(f).$

Por lo tanto, $\|F\|_p = N_p(f)$ para cada f en F.

Espacio $L^p(X,\mu)$

$$L^p(X,\mu) := \mathcal{L}^p(X,\mu)/\mathcal{Z}(X,\mu).$$

La norma en $L^p(X,\mu)$ se define como

$$\|F\|_p := \inf_{f\in F} N_p(f).$$

En realidad, si $\quad g - f \in \mathcal{Z}(X,\mu), \quad$ entonces $\quad N_p(g) = N_p(f).$

Por lo tanto, $\|F\|_p = N_p(f)$ para cada f en F.

En otras palabras,

$$\|f + \mathcal{Z}(X,\mu)\|_p = N_p(f).$$

Para $1 < p < +\infty$, la bola unitaria cerrada en L^p es estrictamente convexa

Ejercicio. Sea $1 < p < +\infty$.
Demostrar que la bola unitaria cerrada en $L^p(X, \mu)$ es estrictamente convexa, esto es, para cualesquiera $F, G \in L^p(X, \mu)$ con

$$\|F\|_p \leq 1, \qquad \|G\|_p \leq 1, \qquad F \neq G,$$

y para cualquier λ en $(0, 1)$, se cumple la desigualdad

$$\|(1 - \lambda)F + \lambda G\|_p < 1.$$

Sugerencia: usar el criterio de igualdad en la desigualdad de Minkowski.