Definición de los espacios L^p

Objetivos. Definir los espacios normados L^p para p en $[1, +\infty]$.

Requisitos. El concepto de norma, la desigualdad de Minkowski, el supremo esencial de funciones positivas.

En este tema estamos suponiendo que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida.

1 Repaso (la seminorma N_p)**.** Sea $p \in [1, +\infty)$. Para cada f en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ pongamos

$$N_p(f) \coloneqq \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Notemos que el lado derecho puede ser infinito. Se usa el convenio que $(+\infty)^{1/p} = +\infty$. En el caso $p = +\infty$, usamos la siguiente definición:

$$\mathcal{N}_p(f) \coloneqq \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} |f|.$$

2 Repaso (las propiedades principales de N_p)**.** Sea $p \in [1, +\infty]$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades.

1. La propiedad subaditiva. Para cualesquiera f, g en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$,

$$N_p(f + g) \le \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_p(g).$$

2. La propiedad homogénea absoluta. Para cualesquiera f en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ y λ en $\mathbb{C}$,

$$N_p(\lambda f) = |\lambda| \, N_p(f).$$

3. $N_p(f) = 0$ si y sólo si $f = 0$ μ-c.t.p.

Las primeras dos propiedades significan que N_p es una seminorma extendida (se admite el valor $+\infty$). Recordemos que la propiedad subaditiva de N_p en el caso $p < +\infty$ se conoce como la desigualdad de Minokowski.

El espacio seminormado $\mathcal{L}^p(X,\mu)$

3 Definición (el conjunto de las funciones integrables en la potencia p)**.**

$$\mathcal{L}^p(X,\mu) \coloneqq \{f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{C}) \colon\ N_p(f) < +\infty\}.$$

4 Proposición. *$\mathcal{L}^p(X,\mu)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{C})$. La función $\widetilde{N}_p \coloneqq N_p|_{\mathcal{L}^p(X,\mu)}$ es una seminorma.*

Demostración. Se sigue de las propiedades de N_p.

En efecto, de la propiedad subaditiva de N_p se sigue que $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ es cerrado bajo la adición: si $f,g \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$, entonces $f+g \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$.

De la propiedad homogénea absoluta de N_p se sigue que $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ es cerrado bajo la multiplicación por escalares: si $f \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $\lambda f \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$.

Denotamos por 0_X a la función constante cero, definida en X. Como $N_p(0_X) = 0$, tenemos que $0_X \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$.

Hemos mostrado que $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ es un subespacio vectorial del espacio $\mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{C})$.

$\widetilde{N}_p$ toma valores en $[0,+\infty)$, es subaditiva y homogénea absoluta. Por eso $\widetilde{N}_p$ es una seminorma. $\square$

5 Definición (el conjunto de las funciones que se anulan casi en todas partes)**.**

$$\mathcal{Z}(X,\mu) \coloneqq \big\{f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{C}) \colon\ f = 0\ \mu\text{-c.t.p.}\big\}.$$

6 Proposición.

$$\mathcal{Z}(X,\mu) = \big\{f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{C}) \colon\ N_p(f) = 0\big\} = \big\{f \in \mathcal{L}^p(X,\mu) \colon\ N_p(f) = 0\big\}. \tag{1}$$

Notemos que la clase $\mathcal{Z}(X,\mu)$ no depende de p, pero se puede describir por medio de la seminorma N_p.

7 Proposición. *$\mathcal{Z}(X,\mu)$ es un subespacio cerrado del espacio seminormado $\mathcal{L}^p(X,\mu)$.*

Demostración. Se sigue fácilmente de (1). $\square$

8 Definición (la relación de congruencia módulo el subespacio $\mathcal{Z}(X,\mu)$)**.** En el conjunto $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ definimos la relación binaria $\sim$ mediante la regla:

$$f \sim g \qquad \Longleftrightarrow \qquad f - g \in \mathcal{Z}(X,\mu).$$

El espacio normado $L^p(X,\mu)$

9 Proposición. *La relación binaria $\sim$ de la definición anterior es una relación de equivalencia.*

Demostración. Este resultado sale fácilmente del hecho que $\mathcal{Z}(X,\mu)$ es un subespacio de $\mathcal{L}^p(X,\mu)$. Probemos la propiedad transitiva. Si $f,g,h \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$, $f \sim g$ y $g \sim h$, entonces $f - g \in \mathcal{Z}(X,\mu)$ y $g - h \in \mathcal{Z}(X,\mu)$. Como $f - h = (f-g) + (g-h)$ y $\mathcal{Z}(X,\mu)$ es cerrado bajo la adición, concluimos que $f - h \in \mathcal{Z}(X,\mu)$, esto es, $f \sim h$. $\square$

10 Proposición (descripción de las clases de equivalencia)**.** *Sea* $f \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$. *Entonces*

$$\big\{g \in \mathcal{L}^p(X,\mu)\colon\ g - f \in \mathcal{Z}(X,\mu)\big\} = \big\{g \in \mathcal{L}^p(X,\mu)\colon \exists h \in \mathcal{Z}(X,\mu)\ \ g = f + h\big\}.$$

El conjunto del lado derecho se denota por $f + \mathcal{Z}(X,\mu)$.

11 Proposición (la propiedad subaditiva de la seminorma en forma inversa)**.** *Sean* $f, g \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$. *Entonces*

$$|N_p(f_1) - N_p(f_2)| \le N_p(f_1 - f_2). \tag{2}$$

Demostración. Aplicamos la propiedad subaditiva:

$$N_p(f) \le N_p(f-g) + N_p(g).$$

Pasamos el sumando $N_p(g)$ al lado izquierdo:

$$N_p(f) - N_p(g) \le N_p(f-g). \tag{3}$$

De manera similar,

$$N_p(g) - N_p(f) \le N_p(f-g). \tag{4}$$

Recordamos que para cualesquiera números reales t, u se tiene la siguiente equivalencia:

$$|t| \le u \qquad \Longleftrightarrow \qquad t \le u\ \wedge\ -t \le u.$$

Luego de (3) y (4) se obtiene (2). □

12 Proposición (congruencia entre las operaciones lineales, la seminorma y la relación de equivalencia)**.** *Sean* $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ *tales que* $f_1 \sim f_2$ *y* $g_1 \sim g_2$. *Entonces*

$$f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2, \qquad \lambda f_1 \sim \lambda f_2, \qquad N_p(f_1) = N_p(f_2).$$

Demostración. Como $\mathcal{Z}(X,\mu)$ es un subespacio de $\mathcal{L}^p(X,\mu)$, las primeras dos afirmaciones se siguen de las siguientes igualdades:

$$(f_1 + g_1) - (f_2 + g_2) = (f_1 - f_2) + (g_1 - g_2), \qquad \lambda f_1 - \lambda f_2 = \lambda(f_1 - f_2).$$

La última afirmación sale de la Proposición 11. □

13 Definición (el espacio $\boldsymbol{L^p(X,\mu)}$)**.** El conjunto L^p se define como el conjunto de las clases de equivalencia $\sim$:

$$L^p(X,\mu) \coloneqq \{f + \mathcal{Z}(X,\mu)\colon \quad f \in \mathcal{L}^p(X,\mu)\}.$$

Las operaciones lineales y la norma en L^p se definen por medio de los representantes:

$$\begin{aligned} (f + \mathcal{Z}(X,\mu)) + (g + \mathcal{Z}(X,\mu)) &\coloneqq (f+g) + \mathcal{Z}(X,\mu), \\ \lambda(f + \mathcal{Z}(X,\mu)) &\coloneqq (\lambda f) + \mathcal{Z}(X,\mu), \\ \|f + \mathcal{Z}(X,\mu)\|_p &\coloneqq N_p(f). \end{aligned}$$

La Proposición 12 justifica que esta definición es consistente. Es fácil ver que $L^p(X,\mu)$ es un espacio vectorial complejo y que la función $\|\cdot\|_p$ es subaditiva y absolutamente homogénea. Notemos que $\mathcal{Z}(X,\mu)$ hace el papel del vector cero en el espacio $L^p(X,\mu)$. Supongamos que $\|f + \mathcal{Z}(X,\mu)\|_p = 0$. Entonces $\mathcal{N}_p(f) = 0$, luego $f \in \mathcal{Z}(X,\mu)$ y $f + \mathcal{Z}(X,\mu) = \mathcal{Z}(X,\mu)$.