Definición de los espacios L^p

Objetivos. Definir los espacios normados L^p para p en $[1, +\infty]$.

Requisitos. El concepto de norma, la desigualdad de Minkowski, el supremo esencial de funciones positivas.

1. La seminorma $\mathcal{N}_p$ (repaso). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $p \in [1, +\infty)$. Para cada f en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ pongamos

$$\mathcal{N}_p(f) \coloneqq \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Notemos que el lado derecho puede ser infinito; se usa el convenio que $(+\infty)^{1/p} = +\infty$. En el caso $p = +\infty$, usamos la siguiente definición:

$$\mathcal{N}_p(f) \coloneqq \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} |f|.$$

En ambos casos ($1 \le p < +\infty$ y $p = +\infty$), se cumplen las siguientes propiedades.

1. La propiedad subaditiva. Para cualesquiera f, g en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$,

$$\mathcal{N}_p(f + g) \le \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_p(g).$$

2. Propiedad homogénea absoluta. Para cualesquiera f en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ y λ en $\mathbb{C}$,

$$\mathcal{N}_p(\lambda f) = |\lambda| \, \mathcal{N}_p(f).$$

3. $\mathcal{N}_p(f) = 0$ si y sólo si $f = 0$ μ-c.t.p.

Las primeras dos propiedades significan que $\mathcal{N}_p$ es una seminorma. Recordemos que la propiedad subaditiva de $\mathcal{N}_p$ (especialmente en el caso $p < +\infty$) se conoce como la desigualdad de Minokowski.

2. Notación ($\mathcal{L}^p(X, \mu), \mathcal{Z}(X, \mu)$). Pongamos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^p(X, \mu) &\coloneqq \{ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \colon \ \mathcal{N}_p(f) < +\infty \}, \\ \mathcal{Z}(X, \mu) &\coloneqq \{ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \colon \ f = 0 \ \mu\text{-c.t.p.} \}. \end{aligned}$$

3. Propiedades elementales de $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ y $\mathcal{Z}(X, \mu)$. Para cada p en $[1, +\infty]$ el conjunto $\mathcal{L}^p(X, \mu)$, dotado de las operaciones puntuales, es un espacio vectorial complejo, y $\mathcal{Z}(X, \mu)$ es un subespacio de $\mathcal{L}^p(X, \mu)$.

Demostración. De la propiedad subaditiva de $\mathcal{N}_p$ se sigue que $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ es cerrado bajo la adición: si $f, g \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$, entonces $f + g \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$. De la propiedad homogénea absoluta de $\mathcal{N}_p$ se sigue que $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ es cerrado bajo la multiplicación por escalares: si $f \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $\lambda f \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$. Se sabe que las operaciones lineales puntuales con funciones cumplen con las propiedades que deben cumplir las operaciones lineales en cualquier espacio vectorial (la propiedad asociativa de la adición, etc.). El papel del cero hace la función constante cero 0_X.

Por una de las propiedades de $\mathcal{N}_p$, tenemos que

$$\mathcal{Z}(X,\mu) = \{f \in \mathcal{L}^p(X,\mu) \colon\ \mathcal{N}_p(f) = 0\}. \tag{1}$$

Notemos que la clase $\mathcal{Z}(X,\mu)$ no depende de p, pero se puede describir por medio de la seminorma $\mathcal{N}_p$. Usando la fórmula (1) y el hecho que $\mathcal{N}_p$ es una seminorma, es fácil verificar que $\mathcal{Z}(X,\mu)$ es un subespacio de $\mathcal{L}^p(X,\mu)$. □

4. Definición (relación binaria inducida por el subespacio $\boldsymbol{\mathcal{Z}(X,\mu)}$). En el conjunto $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ definimos la relación binaria $\sim$ mediante la regla:

$$f \sim g \qquad \Longleftrightarrow \qquad f - g \in \mathcal{Z}(X,\mu).$$

5. Proposición. La relación binaria $\sim$ de la definición anterior es una relación de equivalencia.

Demostración. Este resultado sale fácilmente del hecho que $\mathcal{Z}(X,\mu)$ es un subespacio de $\mathcal{L}^p(X,\mu)$. Probemos la propiedad transitiva. Si $f, g, h \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$, $f \sim g$ y $g \sim h$, entonces $f - g \in \mathcal{Z}(X,\mu)$ y $g - h \in \mathcal{Z}(X,\mu)$. Como $f - h = (f - g) + (g - h)$ y $\mathcal{Z}(X,\mu)$ es cerrado bajo la adición, concluimos que $f - h \in \mathcal{Z}(X,\mu)$, esto es, $f \sim h$. □

6. Descripción de las clases de equivalencia. Sea $f \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$. Entonces

$$\{g \in \mathcal{L}^p(X,\mu) \colon g - f \in \mathcal{Z}(X,\mu)\} = \{g \in \mathcal{L}^p(X,\mu) \colon \exists h \in \mathcal{Z}(X,\mu)\ g = f + h\}.$$

El conjunto del lado derecho se denota por $f + \mathcal{Z}(X,\mu)$.

7. Proposición (propiedad subaditiva de la seminorma en forma inversa). Sean $f, g \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$. Entonces

$$|\mathcal{N}_p(f_1) - \mathcal{N}_p(f_2)| \le \mathcal{N}_p(f_1 - f_2). \tag{2}$$

Demostración. Aplicamos la propiedad subaditiva:

$$\mathcal{N}_p(f) \le \mathcal{N}_p(f - g) + \mathcal{N}_p(g).$$

Pasamos el sumando $\mathcal{N}_p(g)$ al lado izquierdo:

$$\mathcal{N}_p(f) - \mathcal{N}_p(g) \le \mathcal{N}_p(f - g). \tag{3}$$

De manera similar,

$$\mathcal{N}_p(g) - \mathcal{N}_p(f) \le \mathcal{N}_p(f - g). \tag{4}$$

Recordamos que para cualesquiera números reales t, u se tiene la siguiente equivalencia:

$$|t| \le u \qquad \Longleftrightarrow \qquad t \le u \ \wedge \ -t \le u.$$

Luego de (3) y (4) se obtiene (2). □

8. Congruencia entre las operaciones lineales, la seminorma y la relación de equivalencia. Sean $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $f_1 \sim f_2$ y $g_1 \sim g_2$. Entonces

$$f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2, \qquad \lambda f_1 \sim \lambda f_2, \qquad \mathcal{N}_p(f_1) = \mathcal{N}_p(f_2).$$

Demostración. Como $\mathcal{Z}(X, \mu)$ es un subespacio de $\mathcal{L}^p(X, \mu)$, las primeras dos afirmaciones se siguen de las siguientes igualdades:

$$(f_1 + g_1) - (f_2 + g_2) = (f_1 - f_2) + (g_1 - g_2), \qquad \lambda f_1 - \lambda f_2 = \lambda(f_1 - f_2).$$

La última afirmación sale de la Proposición 7. □

9. Definición del espacio $L^p(X, \mu)$. El conjunto L^p se define como el conjunto de las clases de equivalencia $\sim$:

$$L^p(X, \mu) \coloneqq \{f + \mathcal{Z}(X, \mu) \colon \quad f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)\}.$$

Las operaciones lineales y la norma en L^p se definen por medio de representantes:

$$\begin{aligned}
(f + \mathcal{Z}(X, \mu)) + (g + \mathcal{Z}(X, \mu)) &\coloneqq (f + g) + \mathcal{Z}(X, \mu), \\
\lambda(f + \mathcal{Z}(X, \mu)) &\coloneqq (\lambda f) + \mathcal{Z}(X, \mu), \\
\|f + \mathcal{Z}(X, \mu)\|_p &\coloneqq \mathcal{N}_p(f).
\end{aligned}$$

La Proposición 8 justifica que esta definición es consistente. Es fácil ver que $L^p(X, \mu)$ es un espacio vectorial complejo y que la función $\|\cdot\|_p$ es subaditiva y homogénea absoluta. Notemos que $\mathcal{Z}(X, \mu)$ hace el papel del vector cero en el espacio $L^p(X, \mu)$. Supongamos que $\|f + \mathcal{Z}(X, \mu)\|_p = 0$. Entonces $\mathcal{N}_p(f) = 0$, luego $f \in \mathcal{Z}(X, \mu)$ y $f + \mathcal{Z}(X, \mu) = \mathcal{Z}(X, \mu)$.