Los espacios L^p son completos

(un tema de la unidad “Espacios L^p”)

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

4 de noviembre de 2022

Plan

Objetivo:

- demostrar que los espacios $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ y $L^p(X,\mu)$ son completos, donde $(X,\mathcal{F},\mu)$ es un espacio de medida y $1 \leq p < +\infty$.

Prerrequisitos:

- espacios métricos completos;
- sucesiones regulares de Cauchy;
- la definición de los espacios $\mathcal{L}^p$ y L^p;
- la desigualdad de Minkowski;
- el teorema de la convergencia monótona (TCM);
- el lema de Fatou.

Repaso: el espacio seminormado $\mathcal{L}^p(X, \mu)$, $1 \leq p < +\infty$

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}) :=$ las funciones complejas $\mathcal{F}$-medibles.

Repaso: el espacio seminormado $\mathcal{L}^p(X,\mu)$, $1 \le p < +\infty$

$\mathcal{M}(X,\mathcal{F}) :=$ las funciones complejas $\mathcal{F}$-medibles.

Sea $p \in [1,+\infty)$. Definimos $N_p\colon \mathcal{M}(X,\mathcal{F}) \to [0,+\infty]$,

$$N_p(f) := \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

Repaso: el espacio seminormado $\mathcal{L}^p(X, \mu)$, $1 \le p < +\infty$

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}) :=$ las funciones complejas $\mathcal{F}$-medibles.

Sea $p \in [1, +\infty)$. Definimos $N_p \colon \mathcal{M}(X, \mathcal{F}) \to [0, +\infty]$,

$$N_p(f) := \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

N_p es una seminorma extendida (está permitido el valor $+\infty$).

Repaso: el espacio seminormado $\mathcal{L}^p(X,\mu)$, $1 \le p < +\infty$

$\mathcal{M}(X,\mathcal{F}) :=$ las funciones complejas $\mathcal{F}$-medibles.

Sea $p \in [1,+\infty)$. Definimos $N_p\colon \mathcal{M}(X,\mathcal{F}) \to [0,+\infty]$,

$$N_p(f) := \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

N_p es una seminorma extendida (está permitido el valor $+\infty$).

La propiedad subaditiva de N_p se conoce como la desigualdad de Minkowski.

Repaso: el espacio seminormado $\mathcal{L}^p(X,\mu)$, $1 \le p < +\infty$

$\mathcal{M}(X,\mathcal{F}) :=$ las funciones complejas $\mathcal{F}$-medibles.

Sea $p \in [1,+\infty)$. Definimos $N_p \colon \mathcal{M}(X,\mathcal{F}) \to [0,+\infty]$,

$$N_p(f) := \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

N_p es una seminorma extendida (está permitido el valor $+\infty$).

La propiedad subaditiva de N_p se conoce como la desigualdad de Minkowski.

$$\mathcal{L}^p(X,\mu) \;:=\; \Big\{ f \in \mathcal{M}(X,\mu) \colon \quad N_p(f) < +\infty \Big\}.$$

Repaso: el espacio seminormado $\mathcal{L}^p(X,\mu)$, $1 \le p < +\infty$

$\mathcal{M}(X,\mathcal{F}) :=$ las funciones complejas $\mathcal{F}$-medibles.

Sea $p \in [1,+\infty)$. Definimos $N_p\colon \mathcal{M}(X,\mathcal{F}) \to [0,+\infty]$,

$$N_p(f) := \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

N_p es una seminorma extendida (está permitido el valor $+\infty$).

La propiedad subaditiva de N_p se conoce como la desigualdad de Minkowski.

$$\mathcal{L}^p(X,\mu) \ := \ \Big\{ f \in \mathcal{M}(X,\mu)\colon \quad N_p(f) < +\infty \Big\}.$$

$\mathcal{L}^p(X,\mu)$ es un espacio vectorial complejo. La función $N_p|_{\mathcal{L}^p(X,\mu)}$ es una seminorma.

Repaso: el espacio normado $L^p(X,\mu)$

$$\mathcal{Z}(X,\mu) \ := \ \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mu) \colon \quad f \xrightarrow{\ \mu\text{-c.t.p.}\ } 0_X \right\} \ = \ \left\{ f \in \mathcal{L}^p(X,\mu) \colon \ N_p(f) = 0 \right\}.$$

Repaso: el espacio normado $L^p(X, \mu)$

$$\mathcal{Z}(X,\mu) \; := \; \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mu) \colon \quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X \right\} \; = \; \left\{ f \in \mathcal{L}^p(X,\mu) \colon \; N_p(f) = 0 \right\}.$$

$\mathcal{Z}(X, \mu)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}^p(X, \mu)$.

Repaso: el espacio normado $L^p(X,\mu)$

$$\mathcal{Z}(X,\mu) \;:=\; \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mu)\colon \quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X \right\} \;=\; \left\{ f \in \mathcal{L}^p(X,\mu)\colon \; N_p(f) = 0 \right\}.$$

$\mathcal{Z}(X,\mu)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}^p(X,\mu)$.

$$L^p(X,\mu) := \mathcal{L}^p(X,\mu)/\mathcal{Z}(X,\mu).$$

Repaso: el espacio normado $L^p(X, \mu)$

$$\mathcal{Z}(X,\mu) \;:=\; \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mu) \colon \quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X \right\} \;=\; \left\{ f \in \mathcal{L}^p(X,\mu) \colon\; N_p(f) = 0 \right\}.$$

$\mathcal{Z}(X, \mu)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}^p(X, \mu)$.

$$L^p(X,\mu) := \mathcal{L}^p(X,\mu)/\mathcal{Z}(X,\mu).$$

Si $g - f \in \mathcal{Z}(X, \mu)$, entonces $N_p(g) = N_p(f)$.

Repaso: el espacio normado $L^p(X,\mu)$

$$\mathcal{Z}(X,\mu) \;:=\; \Big\{ f\in\mathcal{M}(X,\mu)\colon\quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X \Big\} \;=\; \Big\{ f\in\mathcal{L}^p(X,\mu)\colon\; N_p(f)=0 \Big\}.$$

$\mathcal{Z}(X,\mu)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}^p(X,\mu)$.

$$L^p(X,\mu) := \mathcal{L}^p(X,\mu)/\mathcal{Z}(X,\mu).$$

Si $g-f\in\mathcal{Z}(X,\mu)$, entonces $N_p(g)=N_p(f)$.

La norma en $L^p(X,\mu)$:

$$\forall F\in L^p(X,\mu)\qquad \forall f\in F\qquad \|F\|_p = N_p(f).$$

Plan

Regular de Cauchy en $\mathcal{L}^p \implies$ converge casi en todas partes

En este tema suponemos que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida y $1 \leq p < +\infty$.

Lema 1

Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $\mathcal{L}^p(X, \mu)$.
Entonces existe g en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tal que

$$f_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g.$$

Demostración del Lema 1: definimos una serie

Pongamos $f_0 := 0_X$.

Demostración del Lema 1: definimos una serie

Pongamos $f_0 := 0_X$. Definimos sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y una función h.

$$u_n\colon X \to \mathbb{C}, \qquad u_n := f_n - f_{n-1}.$$

Demostración del Lema 1: definimos una serie

Pongamos $f_0 := 0_X$. Definimos sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y una función h.

$$u_n\colon X \to \mathbb{C}, \qquad u_n := f_n - f_{n-1}.$$

$$v_k\colon X \to [0,+\infty), \qquad v_k := \sum_{n=1}^{k} |u_n| = \sum_{n=1}^{k} |f_n - f_{n-1}|.$$

Demostración del Lema 1: definimos una serie

Pongamos $f_0 := 0_X$. Definimos sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y una función h.

$$u_n \colon X \to \mathbb{C}, \qquad u_n := f_n - f_{n-1}.$$

$$v_k \colon X \to [0,+\infty), \qquad v_k := \sum_{n=1}^{k} |u_n| = \sum_{n=1}^{k} |f_n - f_{n-1}|.$$

$$h \colon X \to [0,+\infty], \qquad h(x) := \lim_{k\to\infty} v_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

Demostración del Lema 1: definimos una serie

Pongamos $f_0 := 0_X$. Definimos sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y una función h.

$$u_n \colon X \to \mathbb{C}, \qquad u_n := f_n - f_{n-1}.$$

$$v_k \colon X \to [0, +\infty), \qquad v_k := \sum_{n=1}^{k} |u_n| = \sum_{n=1}^{k} |f_n - f_{n-1}|.$$

$$h \colon X \to [0, +\infty], \qquad h(x) := \lim_{k\to\infty} v_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

Es fácil ver que todas estas funciones son $\mathcal{F}$-medibles.

Demostración del Lema 1: acotación de $N_p(h)$

$$v_k = \sum_{n=1}^{k} |f_n - f_{n-1}|, \qquad h = \lim_{k\to\infty} v_k.$$

Demostración del Lema 1: acotación de $N_p(h)$

$$v_k = \sum_{n=1}^{k} |f_n - f_{n-1}|, \qquad h = \lim_{k\to\infty} v_k.$$

$v_k \nearrow h$ en cada punto.

Demostración del Lema 1: acotación de $N_p(h)$

$$v_k = \sum_{n=1}^{k} |f_n - f_{n-1}|, \qquad h = \lim_{k\to\infty} v_k.$$

$v_k \nearrow h$ en cada punto. Luego $v_k^p \nearrow h^p$ en cada punto.

Demostración del Lema 1: acotación de $N_p(h)$

$$v_k = \sum_{n=1}^{k} |f_n - f_{n-1}|, \qquad h = \lim_{k\to\infty} v_k.$$

$v_k \nearrow h$ en cada punto. Luego $v_k^p \nearrow h^p$ en cada punto. Aplicamos el TCM:

$$N_p(h)^p$$

Demostración del Lema 1: acotación de $N_p(h)$

$$v_k = \sum_{n=1}^{k} |f_n - f_{n-1}|, \qquad h = \lim_{k\to\infty} v_k.$$

$v_k \nearrow h$ en cada punto. Luego $v_k^p \nearrow h^p$ en cada punto. Aplicamos el TCM:

$$N_p(h)^p =$$

Demostración del Lema 1: acotación de $N_p(h)$

$$v_k = \sum_{n=1}^{k} |f_n - f_{n-1}|, \qquad h = \lim_{k\to\infty} v_k.$$

$v_k \nearrow h$ en cada punto. Luego $v_k^p \nearrow h^p$ en cada punto. Aplicamos el TCM:

$$N_p(h)^p = \int_X h^p \, \mathrm{d}\mu$$

Demostración del Lema 1: acotación de $N_p(h)$

$$v_k = \sum_{n=1}^{k} |f_n - f_{n-1}|, \qquad h = \lim_{k\to\infty} v_k.$$

$v_k \nearrow h$ en cada punto. Luego $v_k^p \nearrow h^p$ en cada punto. Aplicamos el TCM:

$$N_p(h)^p = \int_X h^p \,\mathrm{d}\mu =$$

Demostración del Lema 1: acotación de $N_p(h)$

$$v_k = \sum_{n=1}^{k} |f_n - f_{n-1}|, \qquad h = \lim_{k\to\infty} v_k.$$

$v_k \nearrow h$ en cada punto. Luego $v_k^p \nearrow h^p$ en cada punto. Aplicamos el TCM:

$$N_p(h)^p = \int_X h^p \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X v_k^p \, \mathrm{d}\mu$$

Demostración del Lema 1: acotación de $N_p(h)$

$$v_k = \sum_{n=1}^{k} |f_n - f_{n-1}|, \qquad h = \lim_{k\to\infty} v_k.$$

$v_k \nearrow h$ en cada punto. Luego $v_k^p \nearrow h^p$ en cada punto. Aplicamos el TCM:

$$N_p(h)^p = \int_X h^p \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X v_k^p \, \mathrm{d}\mu =$$

Demostración del Lema 1: acotación de $N_p(h)$

$$v_k = \sum_{n=1}^{k} |f_n - f_{n-1}|, \qquad h = \lim_{k\to\infty} v_k.$$

$v_k \nearrow h$ en cada punto. Luego $v_k^p \nearrow h^p$ en cada punto. Aplicamos el TCM:

$$N_p(h)^p = \int_X h^p \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X v_k^p \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} N_p(v_k)^p.$$

Demostración del Lema 1: acotación de $N_p(h)$

$$v_k = \sum_{n=1}^{k} |f_n - f_{n-1}|, \qquad h = \lim_{k\to\infty} v_k.$$

$v_k \nearrow h$ en cada punto. Luego $v_k^p \nearrow h^p$ en cada punto. Aplicamos el TCM:

$$N_p(h)^p = \int_X h^p \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X v_k^p \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} N_p(v_k)^p.$$

Elevamos a la potencia $1/p$ y usamos la desigualdad de Minkowski:

$$N_p(h)$$

Demostración del Lema 1: acotación de $N_p(h)$

$$v_k = \sum_{n=1}^{k} |f_n - f_{n-1}|, \qquad h = \lim_{k\to\infty} v_k.$$

$v_k \nearrow h$ en cada punto. Luego $v_k^p \nearrow h^p$ en cada punto. Aplicamos el TCM:

$$N_p(h)^p = \int_X h^p \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X v_k^p \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} N_p(v_k)^p.$$

Elevamos a la potencia $1/p$ y usamos la desigualdad de Minkowski:

$$N_p(h) =$$

Demostración del Lema 1: acotación de $N_p(h)$

$$v_k = \sum_{n=1}^{k} |f_n - f_{n-1}|, \qquad h = \lim_{k\to\infty} v_k.$$

$v_k \nearrow h$ en cada punto. Luego $v_k^p \nearrow h^p$ en cada punto. Aplicamos el TCM:

$$N_p(h)^p = \int_X h^p \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X v_k^p \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} N_p(v_k)^p.$$

Elevamos a la potencia $1/p$ y usamos la desigualdad de Minkowski:

$$N_p(h) = \lim_{k\to\infty} N_p(v_k)$$

Demostración del Lema 1: acotación de $N_p(h)$

$$v_k = \sum_{n=1}^{k} |f_n - f_{n-1}|, \qquad h = \lim_{k\to\infty} v_k.$$

$v_k \nearrow h$ en cada punto. Luego $v_k^p \nearrow h^p$ en cada punto. Aplicamos el TCM:

$$N_p(h)^p = \int_X h^p \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X v_k^p \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} N_p(v_k)^p.$$

Elevamos a la potencia $1/p$ y usamos la desigualdad de Minkowski:

$$N_p(h) = \lim_{k\to\infty} N_p(v_k) \leq$$

Demostración del Lema 1: acotación de $N_p(h)$

$$v_k = \sum_{n=1}^{k} |f_n - f_{n-1}|, \qquad h = \lim_{k\to\infty} v_k.$$

$v_k \nearrow h$ en cada punto. Luego $v_k^p \nearrow h^p$ en cada punto. Aplicamos el TCM:

$$N_p(h)^p = \int_X h^p \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X v_k^p \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} N_p(v_k)^p.$$

Elevamos a la potencia $1/p$ y usamos la desigualdad de Minkowski:

$$N_p(h) = \lim_{k\to\infty} N_p(v_k) \le \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} N_p(u_n)$$

Demostración del Lema 1: acotación de $N_p(h)$

$$v_k = \sum_{n=1}^{k} |f_n - f_{n-1}|, \qquad h = \lim_{k\to\infty} v_k.$$

$v_k \nearrow h$ en cada punto. Luego $v_k^p \nearrow h^p$ en cada punto. Aplicamos el TCM:

$$N_p(h)^p = \int_X h^p \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X v_k^p \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} N_p(v_k)^p.$$

Elevamos a la potencia $1/p$ y usamos la desigualdad de Minkowski:

$$N_p(h) = \lim_{k\to\infty} N_p(v_k) \le \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} N_p(u_n) \le$$

Demostración del Lema 1: acotación de $N_p(h)$

$$v_k = \sum_{n=1}^{k} |f_n - f_{n-1}|, \qquad h = \lim_{k\to\infty} v_k.$$

$v_k \nearrow h$ en cada punto. Luego $v_k^p \nearrow h^p$ en cada punto. Aplicamos el TCM:

$$N_p(h)^p = \int_X h^p \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X v_k^p \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} N_p(v_k)^p.$$

Elevamos a la potencia $1/p$ y usamos la desigualdad de Minkowski:

$$N_p(h) = \lim_{k\to\infty} N_p(v_k) \leq \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} N_p(u_n) \leq N_p(f_1) + \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} 2^{-n}$$

Demostración del Lema 1: acotación de $N_p(h)$

$$v_k = \sum_{n=1}^{k} |f_n - f_{n-1}|, \qquad h = \lim_{k\to\infty} v_k.$$

$v_k \nearrow h$ en cada punto. Luego $v_k^p \nearrow h^p$ en cada punto. Aplicamos el TCM:

$$N_p(h)^p = \int_X h^p \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X v_k^p \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} N_p(v_k)^p.$$

Elevamos a la potencia $1/p$ y usamos la desigualdad de Minkowski:

$$N_p(h) = \lim_{k\to\infty} N_p(v_k) \le \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} N_p(u_n) \le N_p(f_1) + \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} 2^{-n} <$$

Demostración del Lema 1: acotación de $N_p(h)$

$$v_k = \sum_{n=1}^{k} |f_n - f_{n-1}|, \qquad h = \lim_{k\to\infty} v_k.$$

$v_k \nearrow h$ en cada punto. Luego $v_k^p \nearrow h^p$ en cada punto. Aplicamos el TCM:

$$N_p(h)^p = \int_X h^p \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X v_k^p \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} N_p(v_k)^p.$$

Elevamos a la potencia $1/p$ y usamos la desigualdad de Minkowski:

$$N_p(h) = \lim_{k\to\infty} N_p(v_k) \le \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} N_p(u_n) \le N_p(f_1) + \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} 2^{-n} < +\infty.$$

Demostración del Lema 1: definición del conjunto bueno

Hemos mostrado que $N_p(h) < +\infty$.

Demostración del Lema 1: definición del conjunto bueno

Hemos mostrado que $N_p(h) < +\infty$. Esto significa que h^p es integrable.

Demostración del Lema 1: definición del conjunto bueno

Hemos mostrado que $N_p(h) < +\infty$. Esto significa que h^p es integrable.

$$Y := \{x \in X : \ h(x) < +\infty\}.$$

Demostración del Lema 1: definición del conjunto bueno

Hemos mostrado que $N_p(h) < +\infty$. Esto significa que h^p es integrable.

$$Y := \{x \in X\colon\ h(x) < +\infty\}.$$

Entonces

$$X \setminus Y$$

Demostración del Lema 1: definición del conjunto bueno

Hemos mostrado que $N_p(h) < +\infty$. Esto significa que h^p es integrable.

$$Y := \{x \in X : \ h(x) < +\infty\}.$$

Entonces

$$X \setminus Y =$$

Demostración del Lema 1: definición del conjunto bueno

Hemos mostrado que $N_p(h) < +\infty$. Esto significa que h^p es integrable.

$$Y := \{x \in X\colon\ h(x) < +\infty\}.$$

Entonces

$$X \setminus Y = \{x \in X\colon\ h(x) = +\infty\}$$

Demostración del Lema 1: definición del conjunto bueno

Hemos mostrado que $N_p(h) < +\infty$. Esto significa que h^p es integrable.

$$Y := \{x \in X\colon\ h(x) < +\infty\}.$$

Entonces

$$X \setminus Y = \{x \in X\colon\ h(x) = +\infty\} =$$

Demostración del Lema 1: definición del conjunto bueno

Hemos mostrado que $N_p(h) < +\infty$. Esto significa que h^p es integrable.

$$Y := \{x \in X\colon\ \ h(x) < +\infty\}.$$

Entonces

$$X \setminus Y = \{x \in X\colon\ \ h(x) = +\infty\} = \{x \in X\colon\ \ h^p(x) = +\infty\}.$$

Demostración del Lema 1: definición del conjunto bueno

Hemos mostrado que $N_p(h) < +\infty$. Esto significa que h^p es integrable.

$$Y := \{x \in X\colon\ h(x) < +\infty\}.$$

Entonces

$$X \setminus Y = \{x \in X\colon\ h(x) = +\infty\} = \{x \in X\colon\ h^p(x) = +\infty\}.$$

Como h^p es integrable, tenemos que $\mu(X \setminus Y)$

Demostración del Lema 1: definición del conjunto bueno

Hemos mostrado que $N_p(h) < +\infty$. Esto significa que h^p es integrable.

$$Y := \{x \in X\colon\ h(x) < +\infty\}.$$

Entonces

$$X \setminus Y = \{x \in X\colon\ h(x) = +\infty\} = \{x \in X\colon\ h^p(x) = +\infty\}.$$

Como h^p es integrable, tenemos que $\mu(X \setminus Y) =$

Demostración del Lema 1: definición del conjunto bueno

Hemos mostrado que $N_p(h) < +\infty$. Esto significa que h^p es integrable.

$$Y := \{x \in X \colon\ h(x) < +\infty\}.$$

Entonces

$$X \setminus Y = \{x \in X \colon\ h(x) = +\infty\} = \{x \in X \colon\ h^p(x) = +\infty\}.$$

Como h^p es integrable, tenemos que $\mu(X \setminus Y) = 0$.

Demostración del Lema 1: definición del conjunto bueno

Hemos mostrado que $N_p(h) < +\infty$. Esto significa que h^p es integrable.

$$Y := \{x \in X\colon\ h(x) < +\infty\}.$$

Entonces

$$X \setminus Y = \{x \in X\colon\ h(x) = +\infty\} = \{x \in X\colon\ h^p(x) = +\infty\}.$$

Como h^p es integrable, tenemos que $\mu(X \setminus Y) = 0$.

Por otro lado, para cada x en Y,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$$

Demostración del Lema 1: definición del conjunto bueno

Hemos mostrado que $N_p(h) < +\infty$. Esto significa que h^p es integrable.

$$Y := \{x \in X\colon\ h(x) < +\infty\}.$$

Entonces

$$X \setminus Y = \{x \in X\colon\ h(x) = +\infty\} = \{x \in X\colon\ h^p(x) = +\infty\}.$$

Como h^p es integrable, tenemos que $\mu(X \setminus Y) = 0$.

Por otro lado, para cada x en Y,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)| = h(x)$$

Demostración del Lema 1: definición del conjunto bueno

Hemos mostrado que $N_p(h) < +\infty$. Esto significa que h^p es integrable.

$$Y := \{x \in X\colon\ h(x) < +\infty\}.$$

Entonces

$$X \setminus Y = \{x \in X\colon\ h(x) = +\infty\} = \{x \in X\colon\ h^p(x) = +\infty\}.$$

Como h^p es integrable, tenemos que $\mu(X \setminus Y) = 0$.

Por otro lado, para cada x en Y,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)| = h(x) < +\infty,$$

Demostración del Lema 1: definición del conjunto bueno

Hemos mostrado que $N_p(h) < +\infty$. Esto significa que h^p es integrable.

$$Y := \{x \in X : \; h(x) < +\infty\}.$$

Entonces

$$X \setminus Y = \{x \in X : \; h(x) = +\infty\} = \{x \in X : \; h^p(x) = +\infty\}.$$

Como h^p es integrable, tenemos que $\mu(X \setminus Y) = 0$.

Por otro lado, para cada x en Y,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)| = h(x) < +\infty,$$

Demostración del Lema 1: definición del conjunto bueno

Hemos mostrado que $N_p(h) < +\infty$. Esto significa que h^p es integrable.

$$Y := \{x \in X : \ h(x) < +\infty\}.$$

Entonces

$$X \setminus Y = \{x \in X : \ h(x) = +\infty\} = \{x \in X : \ h^p(x) = +\infty\}.$$

Como h^p es integrable, tenemos que $\mu(X \setminus Y) = 0$.

Por otro lado, para cada x en Y,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)| = h(x) < +\infty, \qquad \text{luego}$$

Demostración del Lema 1: definición del conjunto bueno

Hemos mostrado que $N_p(h) < +\infty$. Esto significa que h^p es integrable.

$$Y := \{x \in X\colon\ h(x) < +\infty\}.$$

Entonces

$$X \setminus Y = \{x \in X\colon\ h(x) = +\infty\} = \{x \in X\colon\ h^p(x) = +\infty\}.$$

Como h^p es integrable, tenemos que $\mu(X \setminus Y) = 0$.

Por otro lado, para cada x en Y,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)| = h(x) < +\infty, \qquad \text{luego} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ converge.}$$

Demostración del Lema 1: la convergencia puntual en el conjunto bueno

Para cada x en Y, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge.

Demostración del Lema 1: la convergencia puntual en el conjunto bueno

Para cada x en Y, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge. Consideramos sus sumas parciales:

$$\sum_{n=1}^{k} u_n(x)$$

Demostración del Lema 1: la convergencia puntual en el conjunto bueno

Para cada x en Y, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge. Consideramos sus sumas parciales:

$$\sum_{n=1}^{k} u_n(x) =$$

Demostración del Lema 1: la convergencia puntual en el conjunto bueno

Para cada x en Y, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge. Consideramos sus sumas parciales:

$$\sum_{n=1}^{k} u_n(x) = \sum_{n=1}^{k} (f_n(x) - f_{n-1}(x))$$

Demostración del Lema 1: la convergencia puntual en el conjunto bueno

Para cada x en Y, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge. Consideramos sus sumas parciales:

$$\sum_{n=1}^{k} u_n(x) = \sum_{n=1}^{k} (f_n(x) - f_{n-1}(x)) =$$

Demostración del Lema 1: la convergencia puntual en el conjunto bueno

Para cada x en Y, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge. Consideramos sus sumas parciales:

$$\sum_{n=1}^{k} u_n(x) = \sum_{n=1}^{k}(f_n(x) - f_{n-1}(x)) = f_k(x) - f_0(x)$$

Demostración del Lema 1: la convergencia puntual en el conjunto bueno

Para cada x en Y, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge. Consideramos sus sumas parciales:

$$\sum_{n=1}^{k} u_n(x) = \sum_{n=1}^{k} (f_n(x) - f_{n-1}(x)) = f_k(x) - f_0(x) =$$

Demostración del Lema 1: la convergencia puntual en el conjunto bueno

Para cada x en Y, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge. Consideramos sus sumas parciales:

$$\sum_{n=1}^{k} u_n(x) = \sum_{n=1}^{k} (f_n(x) - f_{n-1}(x)) = f_k(x) - f_0(x) = f_k(x).$$

Demostración del Lema 1: la convergencia puntual en el conjunto bueno

Para cada x en Y, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge. Consideramos sus sumas parciales:

$$\sum_{n=1}^{k} u_n(x) = \sum_{n=1}^{k}(f_n(x) - f_{n-1}(x)) = f_k(x) - f_0(x) = f_k(x).$$

Conclusión: para cada x en Y, la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un límite.

Demostración del Lema 1: la convergencia puntual en el conjunto bueno

Para cada x en Y, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge. Consideramos sus sumas parciales:

$$\sum_{n=1}^{k} u_n(x) = \sum_{n=1}^{k} (f_n(x) - f_{n-1}(x)) = f_k(x) - f_0(x) = f_k(x).$$

Conclusión: para cada x en Y, la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un límite.

Definimos $g\colon X \to \mathbb{C}$,

$$g(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), & x \in Y; \\ 0, & x \in X \setminus Y. \end{cases}$$

Demostración del Lema 1: la convergencia puntual en el conjunto bueno

Para cada x en Y, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge. Consideramos sus sumas parciales:

$$\sum_{n=1}^{k} u_n(x) = \sum_{n=1}^{k} (f_n(x) - f_{n-1}(x)) = f_k(x) - f_0(x) = f_k(x).$$

Conclusión: para cada x en Y, la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un límite.

Definimos $g\colon X \to \mathbb{C}$,

$$g(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), & x \in Y; \\ 0, & x \in X \setminus Y. \end{cases}$$

Entonces $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ y $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

Plan

Cauchy en $\mathcal{L}^p$ y converge c.t.p. $\implies$ converge en $\mathcal{L}^p$

Lema 2

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ y sea $g \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{C})$.

Supongamos que

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g.$$

Entonces $g \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$ y $N_p(f_n - g) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Demostración del Lema 2: acotación de $N_p(f_n - f_k)$

Denotamos por Y al conjunto de los puntos de convergencia:

$$Y \;:=\; \left\{x \in X\colon\; f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{g} (x)\right\}.$$

Como $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g$,

Demostración del Lema 2: acotación de $N_p(f_n - f_k)$

Denotamos por Y al conjunto de los puntos de convergencia:

$$Y \ := \ \left\{ x \in X \colon \ f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{g} (x) \right\}.$$

Como $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g, \quad \mu(X \setminus Y) = 0.$

Demostración del Lema 2: acotación de $N_p(f_n - f_k)$

Denotamos por Y al conjunto de los puntos de convergencia:

$$Y \;:=\; \Big\{ x \in X\colon\;\; f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{g} (x) \Big\}.$$

Como $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g, \quad \mu(X \setminus Y) = 0.$

Denotamos por γ_f el medidor de Cauchy de la sucesión $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\gamma_f(k) \;:=$$

Demostración del Lema 2: acotación de $N_p(f_n - f_k)$

Denotamos por Y al conjunto de los puntos de convergencia:

$$Y \;:=\; \Big\{x \in X\colon\; f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{g} (x)\Big\}.$$

Como $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g$, $\quad \mu(X \setminus Y) = 0$.

Denotamos por γ_f el medidor de Cauchy de la sucesión $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\gamma_f(k) \;:=\; \sup_{m,n\geq k} N_p(f_m - f_n).$$

Demostración del Lema 2: acotación de $N_p(f_n - f_k)$

Denotamos por Y al conjunto de los puntos de convergencia:

$$Y \;:=\; \left\{x \in X\colon\; f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{g} (x)\right\}.$$

Como $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g, \quad \mu(X \setminus Y) = 0.$

Denotamos por γ_f el medidor de Cauchy de la sucesión $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\gamma_f(k) \;:=\; \sup_{m,n\geq k} N_p(f_m - f_n).$$

Fijamos k en $\mathbb{N}$. Entonces

$$\forall n \geq k \qquad N_p(f_n - f_k) \leq \gamma_f(k).$$

Demostración del Lema 2: acotación de $N_p(g - f_k)$

Fijamos $k \in \mathbb{N}$. Aplicamos el lema de Fatou a la sucesión $(|f_n - f_k|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ en el conjunto Y:

$$\int_Y \liminf_{n\to\infty} |f_n - f_k|^p \,\mathrm{d}\mu$$

Demostración del Lema 2: acotación de $N_p(g - f_k)$

Fijamos $k \in \mathbb{N}$. Aplicamos el lema de Fatou a la sucesión $(|f_n - f_k|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ en el conjunto Y:

$$\int_Y \liminf_{n\to\infty} |f_n - f_k|^p \, \mathrm{d}\mu \;\leq$$

Demostración del Lema 2: acotación de $N_p(g - f_k)$

Fijamos $k \in \mathbb{N}$. Aplicamos el lema de Fatou a la sucesión $(|f_n - f_k|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ en el conjunto Y:

$$\int_Y \liminf_{n\to\infty} |f_n - f_k|^p \, \mathrm{d}\mu \;\leq\; \liminf_{n\to\infty} \int_Y |f_n - f_k|^p \, \mathrm{d}\mu.$$

Como $f_n \xrightarrow{Y} g$, el lado izquierdo es $\int_Y |g - f_k|^p$.

Demostración del Lema 2: acotación de $N_p(g - f_k)$

Fijamos $k \in \mathbb{N}$. Aplicamos el lema de Fatou a la sucesión $(|f_n - f_k|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ en el conjunto Y:

$$\int_Y \liminf_{n\to\infty} |f_n - f_k|^p \,\mathrm{d}\mu \;\le\; \liminf_{n\to\infty} \int_Y |f_n - f_k|^p \,\mathrm{d}\mu.$$

Como $f_n \xrightarrow{Y} g$, el lado izquierdo es $\int_Y |g - f_k|^p$.

Como $\mu(X \setminus Y) = 0$, podemos pasar a las integrales sobre X.

Demostración del Lema 2: acotación de $N_p(g - f_k)$

Fijamos $k \in \mathbb{N}$. Aplicamos el lema de Fatou a la sucesión $(|f_n - f_k|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ en el conjunto Y:

$$\int_Y \liminf_{n\to\infty} |f_n - f_k|^p \,\mathrm{d}\mu \;\le\; \liminf_{n\to\infty} \int_Y |f_n - f_k|^p \,\mathrm{d}\mu.$$

Como $f_n \xrightarrow{Y} g$, el lado izquierdo es $\int_Y |g - f_k|^p$.

Como $\mu(X \setminus Y) = 0$, podemos pasar a las integrales sobre X.

$$N_p(g - f_k)^p$$

Demostración del Lema 2: acotación de $N_p(g - f_k)$

Fijamos $k \in \mathbb{N}$. Aplicamos el lema de Fatou a la sucesión $(|f_n - f_k|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ en el conjunto Y:

$$\int_Y \liminf_{n\to\infty} |f_n - f_k|^p \,\mathrm{d}\mu \;\le\; \liminf_{n\to\infty} \int_Y |f_n - f_k|^p \,\mathrm{d}\mu.$$

Como $f_n \xrightarrow{Y} g$, el lado izquierdo es $\int_Y |g - f_k|^p$.

Como $\mu(X \setminus Y) = 0$, podemos pasar a las integrales sobre X.

$$N_p(g - f_k)^p \le$$

Demostración del Lema 2: acotación de $N_p(g - f_k)$

Fijamos $k \in \mathbb{N}$. Aplicamos el lema de Fatou a la sucesión $(|f_n - f_k|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ en el conjunto Y:

$$\int_Y \liminf_{n\to\infty} |f_n - f_k|^p \, \mathrm{d}\mu \;\leq\; \liminf_{n\to\infty} \int_Y |f_n - f_k|^p \, \mathrm{d}\mu.$$

Como $f_n \xrightarrow{Y} g$, el lado izquierdo es $\int_Y |g - f_k|^p$.

Como $\mu(X \setminus Y) = 0$, podemos pasar a las integrales sobre X.

$$N_p(g - f_k)^p \leq \liminf_{n\to\infty} N_p(f_n - f_k)^p.$$

Para cada $n \geq k$ se cumple que $N_p(f_n - f_k) \leq \gamma_f(k)$, luego $N_p(g - f_k) \leq \gamma_f(k)$.

Demostración del Lema 2: final

Hemos mostrado que

$$N_p(g - f_k) \leq \gamma_f(k).$$

Demostración del Lema 2: final

Hemos mostrado que

$$N_p(g - f_k) \le \gamma_f(k).$$

Como f es de Cauchy, $\quad \gamma_f(k) \to 0 \quad$ cuando $\quad k \to \infty$.

Demostración del Lema 2: final

Hemos mostrado que

$$N_p(g - f_k) \leq \gamma_f(k).$$

Como f es de Cauchy, $\quad \gamma_f(k) \to 0 \quad$ cuando $\quad k \to \infty$.

Elegimos m en $\mathbb{N}$ tal que $\gamma_f(m) < 1$. Entonces

$$N_p(g)$$

Demostración del Lema 2: final

Hemos mostrado que

$$N_p(g - f_k) \leq \gamma_f(k).$$

Como f es de Cauchy, $\quad \gamma_f(k) \to 0 \quad$ cuando $\quad k \to \infty$.

Elegimos m en $\mathbb{N}$ tal que $\gamma_f(m) < 1$. Entonces

$$N_p(g) \leq$$

Demostración del Lema 2: final

Hemos mostrado que

$$N_p(g - f_k) \le \gamma_f(k).$$

Como f es de Cauchy, $\quad \gamma_f(k) \to 0 \quad$ cuando $\quad k \to \infty$.

Elegimos m en $\mathbb{N}$ tal que $\gamma_f(m) < 1$. Entonces

$$N_p(g) \le N_p(g - f_m) + N_p(f_m)$$

Demostración del Lema 2: final

Hemos mostrado que

$$N_p(g - f_k) \le \gamma_f(k).$$

Como f es de Cauchy, $\quad \gamma_f(k) \to 0 \quad$ cuando $\quad k \to \infty$.

Elegimos m en $\mathbb{N}$ tal que $\gamma_f(m) < 1$. Entonces

$$N_p(g) \le N_p(g - f_m) + N_p(f_m) \le$$

Demostración del Lema 2: final

Hemos mostrado que

$$N_p(g - f_k) \leq \gamma_f(k).$$

Como f es de Cauchy, $\gamma_f(k) \to 0$ cuando $k \to \infty$.

Elegimos m en $\mathbb{N}$ tal que $\gamma_f(m) < 1$. Entonces

$$N_p(g) \leq N_p(g - f_m) + N_p(f_m) \leq \gamma_f(m) + N_p(f_m)$$

Demostración del Lema 2: final

Hemos mostrado que

$$N_p(g - f_k) \le \gamma_f(k).$$

Como f es de Cauchy, $\quad \gamma_f(k) \to 0 \quad$ cuando $\quad k \to \infty$.

Elegimos m en $\mathbb{N}$ tal que $\gamma_f(m) < 1$. Entonces

$$N_p(g) \le N_p(g - f_m) + N_p(f_m) \le \gamma_f(m) + N_p(f_m) <$$

Demostración del Lema 2: final

Hemos mostrado que

$$N_p(g - f_k) \leq \gamma_f(k).$$

Como f es de Cauchy, $\quad \gamma_f(k) \to 0 \quad$ cuando $\quad k \to \infty$.

Elegimos m en $\mathbb{N}$ tal que $\gamma_f(m) < 1$. Entonces

$$N_p(g) \leq N_p(g - f_m) + N_p(f_m) \leq \gamma_f(m) + N_p(f_m) < 1 + N_p(f_m)$$

Demostración del Lema 2: final

Hemos mostrado que

$$\boxed{N_p(g - f_k) \leq \gamma_f(k).}$$

Como f es de Cauchy, $\quad \gamma_f(k) \to 0 \quad$ cuando $\quad k \to \infty$.

Elegimos m en $\mathbb{N}$ tal que $\gamma_f(m) < 1$. Entonces

$$N_p(g) \leq N_p(g - f_m) + N_p(f_m) \leq \gamma_f(m) + N_p(f_m) < 1 + N_p(f_m) <$$

Demostración del Lema 2: final

Hemos mostrado que

$$N_p(g - f_k) \leq \gamma_f(k).$$

Como f es de Cauchy, $\quad \gamma_f(k) \to 0 \quad$ cuando $\quad k \to \infty$.

Elegimos m en $\mathbb{N}$ tal que $\gamma_f(m) < 1$. Entonces

$$N_p(g) \leq N_p(g - f_m) + N_p(f_m) \leq \gamma_f(m) + N_p(f_m) < 1 + N_p(f_m) < +\infty.$$

Demostración del Lema 2: final

Hemos mostrado que

$$N_p(g - f_k) \leq \gamma_f(k).$$

Como f es de Cauchy, $\quad \gamma_f(k) \to 0 \quad$ cuando $\quad k \to \infty$.

Elegimos m en $\mathbb{N}$ tal que $\gamma_f(m) < 1$. Entonces

$$N_p(g) \leq N_p(g - f_m) + N_p(f_m) \leq \gamma_f(m) + N_p(f_m) < 1 + N_p(f_m) < +\infty.$$

Por lo tanto, $g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$.

Demostración del Lema 2: final

Hemos mostrado que

$$N_p(g - f_k) \le \gamma_f(k).$$

Como f es de Cauchy, $\quad \gamma_f(k) \to 0 \quad$ cuando $\quad k \to \infty$.

Elegimos m en $\mathbb{N}$ tal que $\gamma_f(m) < 1$. Entonces

$$N_p(g) \le N_p(g - f_m) + N_p(f_m) \le \gamma_f(m) + N_p(f_m) < 1 + N_p(f_m) < +\infty.$$

Por lo tanto, $g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$.

Ahora la desiguladad $N_p(g - f_k) \le \gamma_f(k)$ implica que $f_k \to g$ en el espacio $\mathcal{L}^p(X, \mu)$.

Plan

Teorema

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $p \in [1, +\infty)$.

Entonces el espacio seminormado $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ es completo.

Teorema

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $p \in [1, +\infty)$.
Entonces el espacio seminormado $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ es completo.

Demostración: se sigue de los Lemas 1 y 2.

Teorema

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $p \in [1, +\infty)$.

Entonces $L^p(X, \mu)$ es un espacio de Banach.

Teorema

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $p \in [1, +\infty)$.
Entonces $L^p(X, \mu)$ es un espacio de Banach.

Se sigue del hecho que $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ es un espacio seminormado completo.

Teorema

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $p \in [1, +\infty)$.
Entonces $L^p(X, \mu)$ es un espacio de Banach.

Se sigue del hecho que $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ es un espacio seminormado completo.

Sin embargo, escribamos una demostración explícita.

Razonamiento: como $\mathcal{L}^p$ es completo, L^p también es completo

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(X,\mu)$.

Razonamiento: como $\mathcal{L}^p$ es completo, L^p también es completo

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(X,\mu)$.

Para cada n en $\mathbb{N}$, elegimos $f_n \in F_n$.

Razonamiento: como $\mathcal{L}^p$ es completo, L^p también es completo

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(X,\mu)$.

Para cada n en $\mathbb{N}$, elegimos $f_n \in F_n$. Luego

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \qquad N_p(f_m - f_n)$$

Razonamiento: como $\mathcal{L}^p$ es completo, L^p también es completo

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(X,\mu)$.

Para cada n en $\mathbb{N}$, elegimos $f_n \in F_n$. Luego

$$\forall m,n \in \mathbb{N} \qquad N_p(f_m - f_n) =$$

Razonamiento: como $\mathcal{L}^p$ es completo, L^p también es completo

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(X,\mu)$.

Para cada n en $\mathbb{N}$, elegimos $f_n \in F_n$. Luego

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \qquad N_p(f_m - f_n) = \|F_m - F_n\|_p.$$

Razonamiento: como $\mathcal{L}^p$ es completo, L^p también es completo

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(X,\mu)$.

Para cada n en $\mathbb{N}$, elegimos $f_n \in F_n$. Luego

$$\forall m,n\in\mathbb{N} \qquad N_p(f_m - f_n) = \|F_m - F_n\|_p.$$

Por lo tanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$.

Razonamiento: como $\mathcal{L}^p$ es completo, L^p también es completo

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(X,\mu)$.

Para cada n en $\mathbb{N}$, elegimos $f_n \in F_n$. Luego

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \qquad N_p(f_m - f_n) = \|F_m - F_n\|_p.$$

Por lo tanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$.

Como $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ es completo, existe g en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ tal que $N_p(f_n - g) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Razonamiento: como $\mathcal{L}^p$ es completo, L^p también es completo

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(X,\mu)$.

Para cada n en $\mathbb{N}$, elegimos $f_n \in F_n$. Luego

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \qquad N_p(f_m - f_n) = \|F_m - F_n\|_p.$$

Por lo tanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$.

Como $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ es completo, existe g en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ tal que $N_p(f_n - g) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Pongamos $G := g + \mathcal{Z}(X,\mu)$.

Razonamiento: como $\mathcal{L}^p$ es completo, L^p también es completo

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(X,\mu)$.

Para cada n en $\mathbb{N}$, elegimos $f_n \in F_n$. Luego

$$\forall m,n \in \mathbb{N} \qquad N_p(f_m - f_n) = \|F_m - F_n\|_p.$$

Por lo tanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$.

Como $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ es completo, existe g en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ tal que $N_p(f_n - g) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Pongamos $G := g + \mathcal{Z}(X,\mu)$. Entonces

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|F_n - G\|_p$$

Razonamiento: como $\mathcal{L}^p$ es completo, L^p también es completo

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(X,\mu)$.

Para cada n en $\mathbb{N}$, elegimos $f_n \in F_n$. Luego

$$\forall m,n\in\mathbb{N} \qquad N_p(f_m - f_n) = \|F_m - F_n\|_p.$$

Por lo tanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$.

Como $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ es completo, existe g en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ tal que $N_p(f_n - g) \to 0$ cuando $n\to\infty$.

Pongamos $G := g + \mathcal{Z}(X,\mu)$. Entonces

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad \|F_n - G\|_p =$$

Razonamiento: como $\mathcal{L}^p$ es completo, L^p también es completo

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(X,\mu)$.

Para cada n en $\mathbb{N}$, elegimos $f_n \in F_n$. Luego

$$\forall m,n \in \mathbb{N} \qquad N_p(f_m - f_n) = \|F_m - F_n\|_p.$$

Por lo tanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$.

Como $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ es completo, existe g en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ tal que $N_p(f_n - g) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Pongamos $G := g + \mathcal{Z}(X,\mu)$. Entonces

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|F_n - G\|_p = N_p(f_n - g).$$

Razonamiento: como $\mathcal{L}^p$ es completo, L^p también es completo

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(X,\mu)$.

Para cada n en $\mathbb{N}$, elegimos $f_n \in F_n$. Luego

$$\forall m,n \in \mathbb{N} \qquad N_p(f_m - f_n) = \|F_m - F_n\|_p.$$

Por lo tanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$.

Como $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ es completo, existe g en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ tal que $N_p(f_n - g) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Pongamos $G := g + \mathcal{Z}(X,\mu)$. Entonces

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|F_n - G\|_p = N_p(f_n - g).$$

Concluimos que

Razonamiento: como $\mathcal{L}^p$ es completo, L^p también es completo

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(X,\mu)$.

Para cada n en $\mathbb{N}$, elegimos $f_n \in F_n$. Luego

$$\forall m,n\in\mathbb{N} \qquad N_p(f_m - f_n) = \|F_m - F_n\|_p.$$

Por lo tanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$.

Como $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ es completo, existe g en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ tal que $N_p(f_n - g) \to 0$ cuando $n\to\infty$.

Pongamos $G := g + \mathcal{Z}(X,\mu)$. Entonces

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad \|F_n - G\|_p = N_p(f_n - g).$$

Concluimos que $\|F_n - G\|_p \to 0$ cuando $n\to\infty$.

Plan

Ejercicio: demostrar que $\mathcal{L}^p$ es completo usando series

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $p \in [1, +\infty)$.

Ejercicio: demostrar que $\mathcal{L}^p$ es completo usando series

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $p \in [1, +\infty)$.

Suponer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_p(u_n) < +\infty.$$

Ejercicio: demostrar que $\mathcal{L}^p$ es completo usando series

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $p \in [1, +\infty)$.

Suponer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_p(u_n) < +\infty.$$

Demostrar que existe g en $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} N_p\left(\sum_{n=1}^{k} u_n - g\right) = 0.$$

Ejercicio: demostrar que $\mathcal{L}^p$ es completo usando series

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $p \in [1, +\infty)$.

Suponer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_p(u_n) < +\infty.$$

Demostrar que existe g en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} N_p\left(\sum_{n=1}^{k} u_n - g\right) = 0.$$

Sugerencia: poner $\quad f_k := \displaystyle\sum_{n=1}^{k} u_n, \quad$ usar ideas de las demostraciones de los Lemas 1 y 2.

Ejercicio: demostrar la convergencia casi en todas partes usando sucesiones de Cauchy en medida

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $p \in [1, +\infty)$.

Ejercicio: demostrar la convergencia casi en todas partes usando sucesiones de Cauchy en medida

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $p \in [1, +\infty)$. Demostrar el siguiente lema.

Ejercicio: demostrar la convergencia casi en todas partes usando sucesiones de Cauchy en medida

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $p \in [1, +\infty)$. Demostrar el siguiente lema.

Lema

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^p(X, \mu)$.

Entonces existen una sucesión escrictamente creciente $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

y una función $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$ tales que

$$f_{\nu(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g.$$

Ejercicio: demostrar la convergencia casi en todas partes usando sucesiones de Cauchy en medida

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $p \in [1, +\infty)$. Demostrar el siguiente lema.

Lema

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^p(X, \mu)$.

Entonces existen una sucesión escrictamente creciente $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

y una función $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$ tales que

$$f_{\nu(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g.$$

Sugerencias. Primero, demostrar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en medida.

Ejercicio: demostrar la convergencia casi en todas partes usando sucesiones de Cauchy en medida

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $p \in [1, +\infty)$. Demostrar el siguiente lema.

Lema

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^p(X, \mu)$.

Entonces existen una sucesión escrictamente creciente $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

y una función $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$ tales que

$$f_{\nu(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g.$$

Sugerencias. Primero, demostrar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en medida.

Luego usar el hecho que en cada sucesión de Cauchy en medida existe una subsucesión que converge μ-c.t.p.