Funciones Lipschitz continuas

Objetivos. Estudiar el concepto de funciones Lipschitz continuas continuas. Estas funciones forman una subclase simple e importante de funciones uniformemente continuas.

Aplicaciones. Funciones uniformemente continuas, funciones contractivas, teorema de Picard.

Prerrequisitos. Funciones uniformemente continuas, el módulo de continuidad de una función.

En este tema suponemos que (X, d_X) y (Y, d_Y) son espacios métricos. Casi todos los conceptos se extienden al caso si (X, d_X) y (Y, d_Y) son espacios pseudométricos.

1 Definición (función Lipschitz continua)**.** Sea $f\colon X \to Y$. Se dice que la función f es *Lipschitz continua*, si existe un coeficiente $\gamma \geq 0$ tal que para cualesquiera a, b en X se cumple que

$$d_Y(f(a), f(b)) \leq \gamma d_X(a, b).$$

En esta situación se dice también que f es Lipschitz continua con coeficiente γ. Denotemos por $\operatorname{Lip}(X, Y)$ al conjunto de todas las funciones Lipschitz continuas de X a Y.

2 Ejercicio (criterio de función Lipschitz continua en términos del módulo de continuidad)**.** Sea $f\colon X \to Y$, y sea $\gamma \geq 0$. Demuestre que f es Lipschitz continua con coeficiente γ si, y sólo si, para cada $\delta > 0$ se cumple la desigualdad

$$\omega_f(\delta) \leq \gamma\delta.$$

3 Ejercicio. Demuestre que $\operatorname{Lip}(X, Y) \subseteq C_u(X, Y)$.

4 Proposición. *Sea X un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f\colon X \to Y$ una función continua en X y derivable en $\operatorname{int}(X)$. Pongamos*

$$\gamma := \sup_{x \in \operatorname{int}(X)} |f'(x)|.$$

Notemos que γ es un elemento de $[0, +\infty]$.

1. *Para cada $\delta > 0$ se cumple la desigualdad* $\quad \omega_f(\delta) \leq \gamma\delta.$

2. $\displaystyle\lim_{\delta \to 0} \frac{\omega_f(\delta)}{\delta} = \gamma.$

3. f es Lipschitz continua si, y sólo si, $\gamma < +\infty$.

Idea de demostración. El inciso 1 se sigue del teorema del valor medio. Si $0 \le \beta < \gamma$ y $\delta_1 > 0$, entonces existe un x en $\operatorname{int}(X)$ tal que $|f'(x)| > \beta$. Luego existe $\delta_2 > 0$ tal que $\delta_2 < \delta_1$, $(x - \delta_2, x + \delta_2) \in \operatorname{int}(X)$, y para cada y en X con $0 < |x - y| \le \delta_2$ se cumple que $|f(y) - f(x)| \ge \beta|y - x|$. Luego para cada δ en $(0, \delta_2)$ obtenemos $\omega_f(\delta)/\delta \ge \beta$. Junto con el inciso 1 esto implica el inciso 2. El inciso 3 sale de los incisos 1 y 2. $\square$

5 Ejercicio. Demostrar bien la Proposición 4.

6 Ejercicio. Sea $f\colon [-5, 5] \to \mathbb{R}$ la función definida mediante la regla $f(x) = x^2$. Calcule ω_f y determine si f es uniformemente continua.

7 Ejercicio. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida mediante la regla $f(x) = x^2$. Calcule ω_f y determine si f es uniformemente continua.

8 Ejercicio. Sea $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida mediante la regla $f(x) = 1/x$. Calcule ω_f y determine si f es uniformemente continua.

9 Proposición (las funciones uniformemente continuas convierten sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy)**.** *Sea $f \in C_u(X, Y)$ y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Entonces $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y.*

10 Tarea. Determine si es cierta la afirmación recíproca a la Proposición 9. En otras palabras, supongamos que para cualquier sucesión de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X, la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en Y. Determine si la función f debe ser uniformemente continua.