Funciones Lipschitz continuas

Objetivos. Definir el concepto de funciones Lipschitz continuas, estudiar sus descripciones equivalentes, estudiar sus propiedades básicas.

Prerrequisitos. Funciones uniformemente continuas, el indicador de continuidad uniforme, el teorema del valor medio.

1 Definición (función Lipschitz continua con coeficiente dado)**.** Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos, sea $f\colon X \to Y$ y sea $L \geq 0$. Se dice que f es *Lipschitz continua con coeficiente* L, si para cada a, b en X

$$d_Y(f(a), f(b)) \leq L\, d_X(a, b).$$

2 Definición (función Lipschitz continua)**.** Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos y sea $f\colon X \to Y$. Se dice que f es *Lipschitz continua*, si existe un número L en $[0, +\infty)$ tal que f es Lipschitz continua con coeficiente L.

3 Definición (el conjunto de las funciones Lipschitz continuas)**.** Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos. Denotamos por $\operatorname{Lip}(X, Y)$ el conjunto de las funciones Lipschitz continuas $X \to Y$. En otras palabras,

$$\operatorname{Lip}(X, Y) := \Big\{ f \in Y^X \colon \quad \exists L \geq 0 \quad \forall a, b \in X \quad d_Y(f(a), f(b)) \leq L\, d_X(a, b) \Big\}.$$

Descripciones equivalentes de funciones Lipschitz continuas

4 Ejercicio (criterio de función Lipschitz continua en términos del supremo de un cociente)**.** Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos y sea $f\colon X \to Y$. Mostrar que

$$f \in \operatorname{Lip}(X, Y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sup_{\substack{a,b \in X\\ a \neq b}} \frac{d_Y(f(a), f(b))}{d_X(a, b)} < +\infty.$$

5 Definición (repaso: el indicador de continuidad uniforme de una función)**.** Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos y sea $f\colon X \to Y$. El *indicador de continuidad uniforme* de f es la función $\omega_f\colon (0, +\infty) \to [0, +\infty]$ definida mediante la siguiente regla:

$$\omega_f(\eta) := \sup \Big\{ d_Y(f(a), f(b)) \colon \quad a, b \in X, \quad d_X(a, b) \leq \eta \Big\}.$$

6 Proposición (criterio de función Lipschitz continua en términos de su indicador de continuidad uniforme)**.** *Sean* (X, d_X)*,* (Y, d_Y) *espacios métricos y sea* $f\colon X \to Y$*. Entonces* f *es Lipschitz continua si, y solo sí, existe* $L \ge 0$ *tal que* $\omega_f(\eta) \le L\eta$ *para cada* $\eta > 0$*.*

Demostración. $\Rightarrow$. Supongamos que f es Lipschitz continua con coeficiente L. Sea $\eta > 0$. Si $a, b \in X$ y $d_X(a, b) \le \eta$, entonces

$$d_Y(f(a), f(b)) \le L\, d_X(a, b) \le L\eta.$$

Hemos mostrado que $L\eta$ es una cota superior del conjunto

$$\Big\{d_Y(f(a), f(b)) \colon \quad a, b \in X, \quad d_X(a, b) \le \eta\Big\}.$$

Por lo tanto, $\omega_f(\eta) \le L\eta$.

$\Leftarrow$. Supongamos que existe $L \ge 0$ tal que $\omega_f(\eta) \le L\eta$ para cada $\eta > 0$. Dados p, q en X con $d_X(p, q) > 0$, pongamos $\eta = d_X(p, q)$ y obtenemos

$$(p, q) \in \big\{(a, b) \in X^2 \colon \quad d_X(a, b) \le \eta\big\}.$$

Por eso

$$d_Y(f(p), f(q)) \in \Big\{d_Y(f(a), f(b)) \colon \quad a, b \in X, \quad d_X(a, b) \le \eta\Big\},$$

y

$$\begin{aligned} d_Y(f(p), f(q)) &\le \sup\Big\{d_Y(f(a), f(b)) \colon \quad a, b \in X, \quad d_X(a, b) \le \eta\Big\} \\ &= \omega_f(\eta) \le L\eta = L d_X(p, q). \end{aligned}$$

En el caso $d_X(p, q) = 0$, para cada $\varepsilon > 0$ hacemos un razonamiento similar con $\eta = d_X(p, q) + \varepsilon$. Obtenemos

$$d_Y(f(p), f(q)) \le L(d_X(p, q) + \varepsilon),$$

y pasamos al límite cuando ε tiende a 0. Este razonamiento es válido también para espacios pseudométricos. $\square$

7 Corolario. *Sean* (X, d_X)*,* (Y, d_Y) *espacios métricos. Entonces* $\operatorname{Lip}(X, Y) \subseteq C_u(X, Y)$*.*

8 Ejercicio. Consideremos la función $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) \coloneqq \sqrt{x}.$$

Calcular ω_f. Demostrar que $f \in C_u([0, +\infty), \mathbb{R})$, pero $f \notin \operatorname{Lip}([0, +\infty), \mathbb{R})$.

Funciones Lipschitz continuas definidas en un intervalo

9 Ejercicio. Sea X un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en cada punto de X. Demostrar que

$$f \in \operatorname{Lip}(X,Y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sup_X |f'| < +\infty.$$

El siguiente ejercicio es más complicado que el anterior y requiere el "teorema de Lagrange" ("la desigualdad del valor medio") para las funciones complejas.

10 Ejercicio. Sea X un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f\colon X \to \mathbb{C}$ una función continua en X y diferenciable en cada punto de $\operatorname{int}(X)$. Demostrar que

$$f \in \operatorname{Lip}(X,Y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sup_{\operatorname{int}(X)} |f'| < +\infty.$$

El espacio normado de las funciones Lipschitz continuas

11 Ejercicio. Sea (X, d_X) un espacio métrico. Demostrar que $\operatorname{Lip}(X,\mathbb{C})$ es un subespacio del espacio vectorial $C_u(X,\mathbb{C})$.

12 Ejercicio (la seminorma canónica y la norma canónica en el espacio de funciones Lipschitz continuas)**.** Sea (X, d_X) un espacio métrico. Se define $N_{\mathrm{Lip}}\colon \operatorname{Lip}(X,\mathbb{C}) \to [0,+\infty)$,

$$N_{\mathrm{Lip}}(f) \coloneqq \sup_{\substack{a,b\in X\\ a\neq b}} \frac{|f(a)-f(b)|}{d_X(a,b)}.$$

Demostrar que N_{Lip} es una seminorma. Se define $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ en $\operatorname{Lip}(X,\mathbb{C})$,

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} \coloneqq N_{\mathrm{Lip}}(f) + \|f\|_{\sup}.$$

Demostar que $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ es una norma.

13 Ejercicio. Sea (X, d_X) un espacio métrico. Demostrar que $\operatorname{Lip}(X,\mathbb{C})$ con la norma $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ es un espacio de Banach.