Medida de Lebesgue:
construcción por del teorema de Carathéodory
y propiedades principales

Objetivos. Aplicar el teorema de Carathéodory para construir la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$; demostrar las propiedades principales de la medida de Lebesgue.

Requisitos. Teorema de Carathéodory.

1. Semianillo de cajas semiabiertas. Consideremos la colección $\mathcal{S}$ de los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ de la forma

$$\prod_{j=1}^{n}[a_j, b_j),$$

donde $a_j, b_j \in \mathbb{R}$. Recordar cómo se demuestra que $\mathcal{S}$ es un semianillo. En particular, representar la diferencia de dos cajas semiabiertas

$$\left(\prod_{j=1}^{n}[a_j, b_j)\right) \setminus \left(\prod_{j=1}^{n}[c_j, d_j)\right)$$

como una unión disjunta de cajas semiabiertas.

2. Volumen de cajas semiabiertas. Definimos $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty)$ mediante la regla: si

$$C = \prod_{j=1}^{n}[a_j, b_j)$$

con $a_j < b_j$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, entonces

$$\lambda(C) = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j);$$

en otro caso $\lambda(C) = 0$. Demostrar que λ es una premedida sobre $\mathcal{S}$.

3. Volumen sobre uniones finitas de cajas semiabiertas. Denotemos por $\mathcal{A}$ al anillo sobre $\mathbb{R}^n$ generado por el semianillo $\mathcal{S}$. Recuerde cómo se describen los elementos de $\mathcal{A}$ y cómo se extiende la premedida λ del semianillo $\mathcal{S}$ al anillo $\mathcal{A}$.

4. Construcción de la medida de Lebesgue. Explicar cómo se construye la medida de Lebesgue usando el teorema de Carathéodory. Denotamos por μ a la medida de Lebesgue y por $\mathcal{F}$ a la colección de los conjuntos Lebesgue-medibles sobre $\mathbb{R}^n$.

5. Lema. Sean $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ tales que $a_j < b_j$ para cada j en $\{1, \ldots, n\}$. Entonces la caja abierta $A \coloneqq \prod_{j=1}^n (a_j, b_j)$ pertenece a $\mathcal{F}$, y

$$\mu(A) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j).$$

Demostración. El conjunto A se puede ver como una unión numerable creciente de cajas semiabiertas:

$$\prod_{j=1}^n (a_j, b_j) = \bigcup_{k=1}^\infty \left[a_j - \frac{1}{k}, b_j\right),$$

por eso $A \in \mathcal{F}$ y

$$\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \prod_{j=1}^n \left(b_j - a_j + \frac{1}{k}\right) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j). \qquad \square$$

6. Proposición. Cada subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ es Lebesgue-medible. Más aún, la σ-álgebra de Borel está contenida en la σ-álgebra de Lebesgue $\mathcal{F}$.

Demostración. Se puede demostrar que cada subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ es una unión finita o numerable de cajas abiertas, y por eso pertenece a la σ-álgebra $\mathcal{F}$. $\square$

7. Proposición (criterio de conjuntos Lebesgue-medibles de medida cero). Sea $Y \subset \mathbb{R}^n$. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a) $Y \in \mathcal{F}$ y $\mu(Y) = 0$;

(b) para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de cajas abiertas tal que $Y \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j$ y $\sum_{j=1}^\infty \mu(U_j) < \varepsilon$.

Demostración. (a)⇒(b). Sea $Y \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(Y) = 0$. Por la construcción de Carathéodory, $\mu(Y) = \lambda^*(Y)$, donde λ^* es la medida exterior generada por la medida-volumen. Por la definición de λ^*, para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de cajas semiabiertas tal que $Y \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}}$ y

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(C_k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Escribimos C_k como

$$C_k = \prod_{j=1}^n [a_{k,j}, b_{k,j}).$$

Pongamos

$$\delta_{k,j} = (b_{k,j} - a_{k,j}) \left(\sqrt[n]{2} - 1\right),$$

$$U_k = \prod_{j=1}^{n} (a_{k,j} - \delta_{k,j}, b_{k,j}) .$$

Entonces $C_k \subset U_k$, $\mu(U_k) = 2\mu(C_k)$ y

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(U_k) < \varepsilon.$$

(b)$\Rightarrow$(a). Supongamos que se cumple (b). Poniendo $\varepsilon = 1/p$ con $p \in \mathbb{N}$, para cada $p \in \mathbb{N}$ encontramos una sucesión $(U_{p,j})_{j\in\mathbb{N}}$ de cajas abiertas tal que

$$Y \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_{p,j}, \qquad \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(U_{p,j}) < \frac{1}{p}.$$

Pongamos

$$V_p \coloneqq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_{p,j}, \qquad W \coloneqq \bigcap_{p\in\mathbb{N}} V_p.$$

Como $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra, tenemos que $V_p \in \mathcal{F}$ para cada p y $W \in \mathcal{F}$. Aplicando la propiedad σ-subaditiva de la medida μ, obtenemos que $\mu(V_p) < 1/p$ para cada p en $\mathbb{N}$. Luego, aplicando la propiedad monótona de μ, obtenemos que $\mu(W) < 1/p$ para cada p en $\mathbb{N}$, así que $\mu(W) = 0$. Como $Y \subset W$ y la medida μ es completa, concluimos que $Y \in \mathcal{F}$ y $\mu(Y) = 0$. $\square$

8. Ejercicio. Sea $Y \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que

$$\lambda^*(Y) = \inf \left\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j) \colon \quad A_j \text{ son abiertos}, \quad Y \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \right\}.$$

9. Lema. Sea $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y sea $c \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} (A_j + c) = \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \right) + c, \qquad \bigcap_{j\in\mathbb{N}} (A_j + c) = \left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j \right) + c.$$

Además, si $A \subset \mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathbb{R}^n \setminus (A + c) = (\mathbb{R}^n \setminus A) + c.$$

10. Proposición (la medida de Lebesgue es invariante bajo traslaciones). Para cualquier A en $\mathcal{F}$ y cualquier c en $\mathbb{R}^n$, se tiene que $A + c \in \mathcal{F}$ y

$$\mu(A + c) = \mu(A).$$

Demostración. 1. Fijamos c en $\mathbb{R}^n$. Es fácil ver que para cualquier A en $\mathcal{S}$, $A + c \in \mathcal{S}$ y $\lambda(A + c) = \lambda(A)$.

2. Si $A \in \mathcal{R}$, es decir, si A es una unión disjunta de cajas semiabiertas $B_1, \ldots, B_m$, entonces $A+c$ es la unión de los conjuntos disjuntos B_j+c con $j \in \{1, \ldots, m\}$. Aplicando el inciso 1 concluimos que $A + c \in \mathcal{R}$ y $\lambda(A + c) = \lambda(A)$.

3. Demostremos que la medida exterior λ^* es invariante bajo traslaciones. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Para cualquier $\mathcal{R}$-cubierta $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ del conjunto A, tenemos que $(B_j + c)_{j\in\mathbb{N}}$ del conjunto $A + c$, y

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda(B_j + c) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda(B_j).$$

$\Phi(A) = \Phi(A + c)$, $J(\Phi(A)) = J(\Phi(A + c))$, y $\lambda^*(A + c) = \lambda^*(A)$.

4. Sea $A \in \mathcal{F}$. Mostremos que $A + c \in \mathcal{F}$. Para cualquier $P \subset \mathbb{R}^n$, tenemos

$$\begin{aligned}\lambda^*(P \cap (A + c)) + \lambda^*(P \cap (A + c)^c) &= \lambda^*((P - c) \cap A) + \lambda^*((P - c) \cap A^c)\\ &= \lambda^*(P - c) = \lambda^*(P).\end{aligned}$$

Hemos mostrado que $A + c \in \mathcal{F}$.

5. La medida de Lebesgue μ coincide con la medida exterior λ^*, restringida a la σ-álgebra $\mathcal{C}_{\lambda^*}$, por eso μ es invariante bajo traslaciones. □

11. Ejercicio. Demuestre que para cualquier $A \in \mathcal{F}$ y cualquier $c \in \mathbb{R}$, $cA \in \mathcal{F}$ y

$$\mu(cA) = |c|\,\mu(A).$$

12. Demuestre que en $\mathbb{R}$ existen conjuntos que no son Lebesgue-medibles (se usa el axioma de elección).