La integral de la suma finita o numerable de funciones positivas (un tema de análisis real)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas, México

13 de junio de 2024

Plan

En esta presentación seguimos el camino de Bartle y Rudin.

Objetivos. Demostrar que

$$\int_X (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu + \int_X g\,\mathrm{d}\mu,$$

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k\,\mathrm{d}\mu,$$

donde todas las funciones son medibles positivas.

En esta presentación seguimos el camino de Bartle y Rudin.

Objetivos. Demostrar que

$$\int_X (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu + \int_X g\,\mathrm{d}\mu,$$

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k\,\mathrm{d}\mu,$$

donde todas las funciones son medibles positivas.

Son unas de las propiedades más poderosas de la integral de Lebesgue.

Prerrequisitos:

- el teorema de la convergencia monótona (de Lebesgue),
- la suma de dos funciones medibles es medible,
- la propiedad aditiva de la integral de funciones simples medibles positivas,
- aproximación de funciones medibles positivas por sucesiones crecientes de funciones simples medibles positivas,
- el límite de la suma de dos sucesiones.

Plan

¿En qué etapa estamos?

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

¿En qué etapa estamos?

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

- $\displaystyle\int_X^{(1)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,

¿En qué etapa estamos?

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

- $\displaystyle\int_X^{(1)} f \, \mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,
- $\displaystyle\int_X^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,

¿En qué etapa estamos?

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

- $\displaystyle\int_X^{(1)} f \, \mathrm{d}\mu \quad \text{para} \quad f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)),$
- $\displaystyle\int_X^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu \quad \text{para} \quad f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty]),$
- $\displaystyle\int_X^{(3)} f \, \mathrm{d}\mu \quad \text{para} \quad f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}) \quad \text{con} \int_X^{(2)} |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty,$

¿En qué etapa estamos?

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

- $\displaystyle\int_X^{(1)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,
- $\displaystyle\int_X^{(2)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,
- $\displaystyle\int_X^{(3)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ con $\displaystyle\int_X^{(2)} |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$,
- $\displaystyle\int_X^{(4)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ con $\displaystyle\int_X^{(2)} |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$.

¿En qué etapa estamos?

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

- $\displaystyle\int_X^{(1)} f\,\mathrm{d}\mu \quad \text{para} \quad f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)),$
- $\displaystyle\int_X^{(2)} f\,\mathrm{d}\mu \quad \text{para} \quad f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty]),$ $\leftarrow$ usted está aquí
- $\displaystyle\int_X^{(3)} f\,\mathrm{d}\mu \quad \text{para} \quad f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}) \quad \text{con} \int_X^{(2)} |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty,$
- $\displaystyle\int_X^{(4)} f\,\mathrm{d}\mu \quad \text{para} \quad f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \quad \text{con} \int_X^{(2)} |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty.$

En este tema suponemos que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida.

Teorema de la convergencia monótona de Lebesgue, repaso

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.
Denotemos por $g\colon X \to [0, +\infty]$ la función límite:

$$g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Entonces $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y

$$\int_X g \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Proposición (la suma de dos funciones medibles es medible, repaso)

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces, $f + g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Proposición (la suma de dos funciones medibles es medible, repaso)

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces, $f + g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Hemos demostrado esta proposición para funciones complejas,
pero el mismo camino de demostración sirve para funciones con valores en $[0, +\infty]$.
La operación $+$ en $[0, +\infty]$ es continua.

La propiedad aditiva de $\int^{(1)}$, repaso

En una de las clases anteriores demostramos el siguiente resultado.

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$. Entonces

$$\int_X^{(1)} (f + g)\,\mathrm{d}\mu = \int_X^{(1)} f\,\mathrm{d}\mu + \int_X^{(1)} g\,\mathrm{d}\mu.$$

La propiedad aditiva de $\int^{(1)}$, repaso

En una de las clases anteriores demostramos el siguiente resultado.

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$. Entonces

$$\int_X^{(1)} (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_X^{(1)} f\,\mathrm{d}\mu + \int_X^{(1)} g\,\mathrm{d}\mu.$$

En esta clase vamos a demostrar un resultado similar para $\int^{(2)}$.

Aproximación de la función identidad por una escalera, repaso

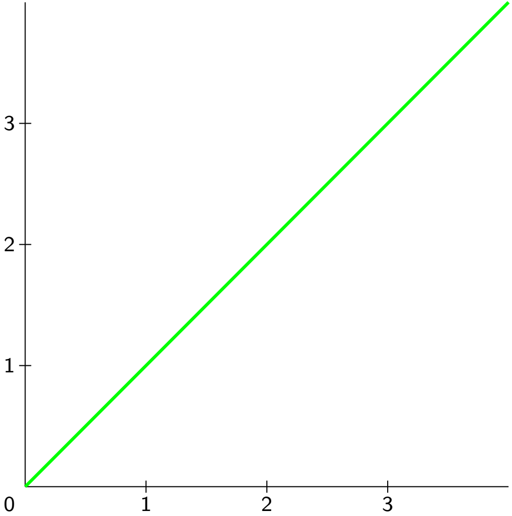
Teorema

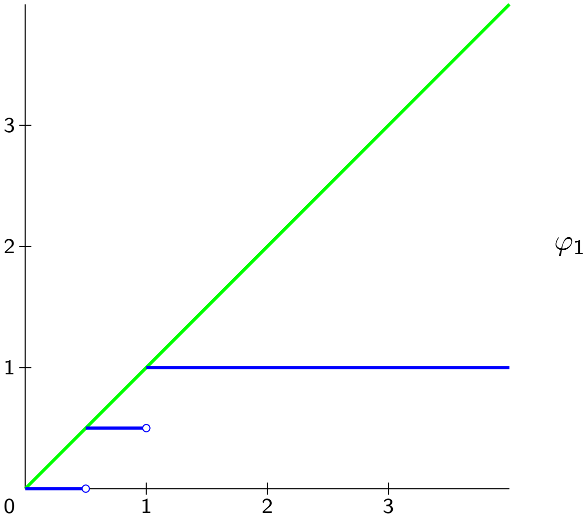
Para cada n en $\mathbb{N}$, definimos $\varphi_n\colon [0,+\infty] \to [0,+\infty)$ mediante la regla

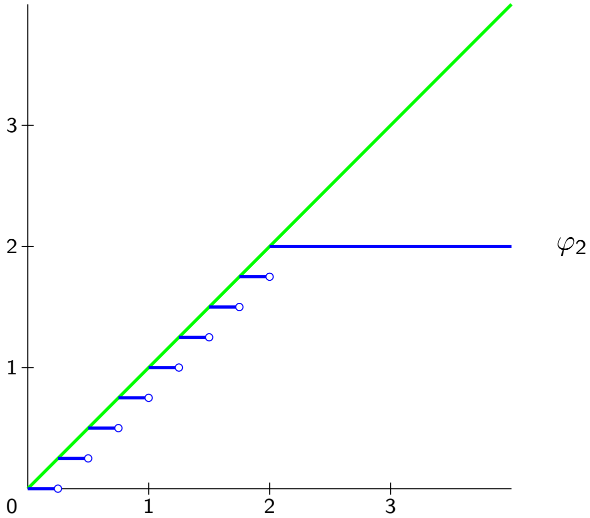
$$\varphi_n(t) := \begin{cases} \dfrac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n}, & 0 \le t < n; \\ n, & t \ge n. \end{cases}$$

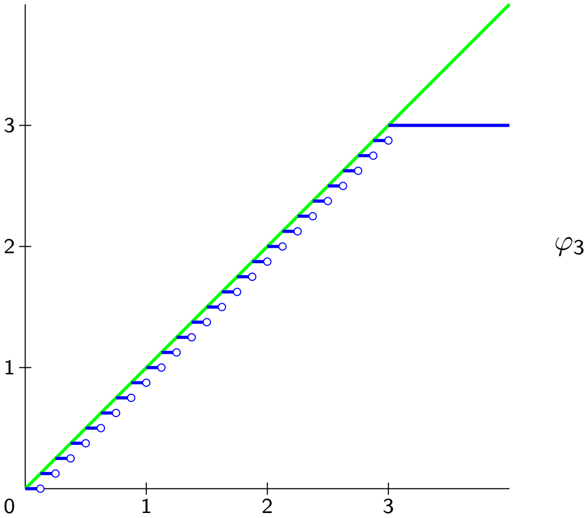
Entonces para cada n en $\mathbb{N}$, la función φ_n es simple y medible, y

$$\forall t \in [0,+\infty] \qquad (\varphi_n(t))_{n\in\mathbb{N}} \nearrow t.$$


0
1
2
3
1
2
3


3
2
1
0
1
2
3
φ_1


3
2
1
0
1
2
3
φ_2


3
2
1
0
1
2
3
φ_3

Cada función positiva medible es el límite de una sucesión creciente de funciones simples medibles positivas

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Entonces, existe una sucesión $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ tal que

$$(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \nearrow f.$$

Cada función positiva medible es el límite de una sucesión creciente de funciones simples medibles positivas

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Entonces, existe una sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ tal que

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow f.$$

Idea de demostración.

Cada función positiva medible es el límite de una sucesión creciente de funciones simples medibles positivas

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Entonces, existe una sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ tal que

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow f.$$

Idea de demostración.

$$s_n := \varphi_n \circ f.$$

La integral de la suma de dos funciones medibles positivas

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces,

$$\int_X (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu + \int_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

La integral de la suma de dos funciones medibles positivas

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces,

$$\int_X (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu + \int_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

Idea de demostración:

aproximar f y g por sucesiones crecientes de funciones simples medibles positivas, luego aplicar la propiedad aditiva de $\int^{(1)}$ y el TCM.

Demostración, inicio

Sean $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}, (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))^{\mathbb{N}}$ tales que

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow f, \qquad (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow g.$$

Demostración, inicio

Sean $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}, (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))^{\mathbb{N}}$ tales que

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow f, \qquad (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow g.$$

Entonces,

$$(s_n + t_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Demostración, inicio

Sean $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}, (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))^{\mathbb{N}}$ tales que

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow f, \qquad (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow g.$$

Entonces,

$$(s_n + t_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow (f + g).$$

Demostración, inicio

Sean $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}, (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))^{\mathbb{N}}$ tales que

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow f, \qquad (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow g.$$

Entonces,

$$(s_n + t_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow (f + g).$$

Por la propiedad aditiva de la integral en el caso de funciones simples positivas,

$$\int_X^{(1)} (s_n + t_n)\,\mathrm{d}\mu =$$

Demostración, inicio

Sean $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}, (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))^{\mathbb{N}}$ tales que

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow f, \qquad (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow g.$$

Entonces,

$$(s_n + t_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow (f + g).$$

Por la propiedad aditiva de la integral en el caso de funciones simples positivas,

$$\int_X^{(1)} (s_n + t_n)\,\mathrm{d}\mu = \int_X^{(1)} s_n\,\mathrm{d}\mu + \int_X^{(1)} t_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Demostración, inicio

Sean $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}, (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}(X,\mathcal{F},[0,+\infty))^{\mathbb{N}}$ tales que

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow f, \qquad (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow g.$$

Entonces,

$$(s_n + t_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow (f+g).$$

Por la propiedad aditiva de la integral en el caso de funciones simples positivas,

$$\int_X^{(1)} (s_n + t_n)\,\mathrm{d}\mu = \int_X^{(1)} s_n\,\mathrm{d}\mu + \int_X^{(1)} t_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Estas sucesiones de integrales crecen, por eso existen sus límites, cuando $n \to \infty$.

Demostración, final

Sabemos que $\int^{(1)}$ coincide con $\int^{(2)}$ para las funciones de clase $\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$.

$$\int_X (s_n + t_n)\,\mathrm{d}\mu = \int_X s_n\,\mathrm{d}\mu + \int_X t_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Demostración, final

Sabemos que $\int^{(1)}$ coincide con $\int^{(2)}$ para las funciones de clase $\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$.

$$\int_X (s_n + t_n)\,\mathrm{d}\mu = \int_X s_n\,\mathrm{d}\mu + \int_X t_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Pasamos al límite, cuando $n \to \infty$.

Demostración, final

Sabemos que $\int^{(1)}$ coincide con $\int^{(2)}$ para las funciones de clase $\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$.

$$\int_X (s_n + t_n)\,\mathrm{d}\mu = \int_X s_n\,\mathrm{d}\mu + \int_X t_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Pasamos al límite, cuando $n \to \infty$. Aplicamos el teorema sobre el límite de la suma:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X (s_n + t_n)\,\mathrm{d}\mu =$$

Demostración, final

Sabemos que $\int^{(1)}$ coincide con $\int^{(2)}$ para las funciones de clase $\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$.

$$\int_X (s_n + t_n)\,\mathrm{d}\mu = \int_X s_n\,\mathrm{d}\mu + \int_X t_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Pasamos al límite, cuando $n \to \infty$. Aplicamos el teorema sobre el límite de la suma:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X (s_n + t_n)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n\,\mathrm{d}\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X t_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Aplicamos el TCM a cada una de las sucesiones $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(s_n + t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Demostración, final

Sabemos que $\int^{(1)}$ coincide con $\int^{(2)}$ para las funciones de clase $\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$.

$$\int_X (s_n + t_n)\,\mathrm{d}\mu = \int_X s_n\,\mathrm{d}\mu + \int_X t_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Pasamos al límite, cuando $n \to \infty$. Aplicamos el teorema sobre el límite de la suma:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X (s_n + t_n)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n\,\mathrm{d}\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X t_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Aplicamos el TCM a cada una de las sucesiones $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(s_n + t_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Obtenemos

$$\int_X (f + g)\,\mathrm{d}\mu =$$

Demostración, final

Sabemos que $\int^{(1)}$ coincide con $\int^{(2)}$ para las funciones de clase $\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$.

$$\int_X (s_n + t_n)\,\mathrm{d}\mu = \int_X s_n\,\mathrm{d}\mu + \int_X t_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Pasamos al límite, cuando $n \to \infty$. Aplicamos el teorema sobre el límite de la suma:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X (s_n + t_n)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n\,\mathrm{d}\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X t_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Aplicamos el TCM a cada una de las sucesiones $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(s_n + t_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Obtenemos

$$\int_X (f + g)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu + \int_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

Observación

Podemos definir s_n y t_n como

$$s_n := \varphi_n \circ f, \qquad t_n := \varphi_n \circ g.$$

Observación

Podemos definir s_n y t_n como

$$s_n := \varphi_n \circ f, \qquad t_n := \varphi_n \circ g.$$

Sin embargo, $s_n + t_n$ puede no coincidir con $\varphi_n \circ (f + g)$.

Observación

Podemos definir s_n y t_n como

$$s_n := \varphi_n \circ f, \qquad t_n := \varphi_n \circ g.$$

Sin embargo, $s_n + t_n$ puede no coincidir con $\varphi_n \circ (f + g)$.

Es una de las razones porque no es cómodo definir $\displaystyle\int_X^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu$ como

$$\lim_{n\to\infty} \int_X^{(1)} (\varphi_n \circ f) \, \mathrm{d}\mu.$$

La integral de la serie de funciones medibles positivas

Teorema

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])^{\mathbb{N}}$. Definimos $g\colon X \to [0, +\infty]$,

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in X).$$

Entonces,

$$\int_X g \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

La integral de la serie de funciones medibles positivas

Teorema

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])^{\mathbb{N}}$. Definimos $g\colon X \to [0, +\infty]$,

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in X).$$

Entonces,

$$\int_X g \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Idea de demostración:

La integral de la serie de funciones medibles positivas

Teorema

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},[0,+\infty])^{\mathbb{N}}$. Definimos $g\colon X \to [0,+\infty]$,

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in X).$$

Entonces,

$$\int_X g \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Idea de demostración: aplicar el TCM a las sumas parciales.

Demostración

Para cada n en $\mathbb{N}$, denotemos por h_n a la n-ésima suma parcial:

$$h_n := \sum_{k=1}^{n} f_k.$$

Demostración

Para cada n en $\mathbb{N}$, denotemos por h_n a la n-ésima suma parcial:

$$h_n := \sum_{k=1}^{n} f_k.$$

Como $f_k \geq 0$ para cada k,

Demostración

Para cada n en $\mathbb{N}$, denotemos por h_n a la n-ésima suma parcial:

$$h_n := \sum_{k=1}^{n} f_k.$$

Como $f_k \geq 0$ para cada k, $\quad (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow.$

Demostración

Para cada n en $\mathbb{N}$, denotemos por h_n a la n-ésima suma parcial:

$$h_n := \sum_{k=1}^{n} f_k.$$

Como $f_k \geq 0$ para cada k, $\quad (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow$.

$$\int_X g \, \mathrm{d}\mu$$

Demostración

Para cada n en $\mathbb{N}$, denotemos por h_n a la n-ésima suma parcial:

$$h_n := \sum_{k=1}^{n} f_k.$$

Como $f_k \geq 0$ para cada k, $\quad (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow$.

$$\int_X g \,\mathrm{d}\mu = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} h_n\right) \mathrm{d}\mu$$

Demostración

Para cada n en $\mathbb{N}$, denotemos por h_n a la n-ésima suma parcial:

$$h_n := \sum_{k=1}^{n} f_k.$$

Como $f_k \geq 0$ para cada k, $\quad (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow$.

$$\int_X g \,\mathrm{d}\mu = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} h_n \right) \mathrm{d}\mu \overset{\text{TCM}}{=\!=\!=}$$

Demostración

Para cada n en $\mathbb{N}$, denotemos por h_n a la n-ésima suma parcial:

$$h_n := \sum_{k=1}^{n} f_k.$$

Como $f_k \geq 0$ para cada k, $\quad (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow$.

$$\int_X g \,\mathrm{d}\mu = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} h_n\right) \mathrm{d}\mu \overset{\text{TCM}}{=\!=\!=} \lim_{n\to\infty} \int_X h_n \,\mathrm{d}\mu$$

Demostración

Para cada n en $\mathbb{N}$, denotemos por h_n a la n-ésima suma parcial:

$$h_n := \sum_{k=1}^{n} f_k.$$

Como $f_k \geq 0$ para cada k, $\quad (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow$.

$$\int_X g \, \mathrm{d}\mu = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} h_n \right) \mathrm{d}\mu \xlongequal{\text{TCM}} \lim_{n\to\infty} \int_X h_n \, \mathrm{d}\mu =$$

Demostración

Para cada n en $\mathbb{N}$, denotemos por h_n a la n-ésima suma parcial:

$$h_n := \sum_{k=1}^{n} f_k.$$

Como $f_k \geq 0$ para cada k, $\quad (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow$.

$$\int_X g \,\mathrm{d}\mu = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} h_n\right) \mathrm{d}\mu \overset{\text{TCM}}{=\!=\!=} \lim_{n\to\infty} \int_X h_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu$$

Demostración

Para cada n en $\mathbb{N}$, denotemos por h_n a la n-ésima suma parcial:

$$h_n := \sum_{k=1}^{n} f_k.$$

Como $f_k \geq 0$ para cada k, $\quad (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow$.

$$\int_X g \,\mathrm{d}\mu = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} h_n\right) \mathrm{d}\mu \overset{\text{TCM}}{=\!=\!=} \lim_{n\to\infty} \int_X h_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu$$

$$\overset{\text{propiedad aditiva de } \int}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}$$

Demostración

Para cada n en $\mathbb{N}$, denotemos por h_n a la n-ésima suma parcial:

$$h_n := \sum_{k=1}^{n} f_k.$$

Como $f_k \geq 0$ para cada k, $\quad (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow$.

$$\int_X g \,\mathrm{d}\mu = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} h_n\right) \mathrm{d}\mu \xlongequal{\text{TCM}} \lim_{n\to\infty} \int_X h_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu$$

$$\xlongequal{\text{propiedad aditiva de } \int} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu$$

Demostración

Para cada n en $\mathbb{N}$, denotemos por h_n a la n-ésima suma parcial:

$$h_n := \sum_{k=1}^{n} f_k.$$

Como $f_k \geq 0$ para cada k, $\quad (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow$.

$$\int_X g \, \mathrm{d}\mu = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} h_n \right) \mathrm{d}\mu \overset{\text{TCM}}{=\!=\!=} \lim_{n\to\infty} \int_X h_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k \, \mathrm{d}\mu$$

$$\overset{\text{propiedad aditiva de } \int}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k \, \mathrm{d}\mu \overset{\text{def. serie}}{=\!=\!=}$$

Demostración

Para cada n en $\mathbb{N}$, denotemos por h_n a la n-ésima suma parcial:

$$h_n := \sum_{k=1}^{n} f_k .$$

Como $f_k \geq 0$ para cada k, $\quad (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow$.

$$\int_X g \,\mathrm{d}\mu = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} h_n\right) \mathrm{d}\mu \overset{\text{TCM}}{=\!=\!=} \lim_{n\to\infty} \int_X h_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu$$

$$\overset{\text{propiedad aditiva de } \int}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu \overset{\text{def. serie}}{=\!=\!=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Ejercicio: la serie numérica positiva como una integral de Lebesgue

Sea $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0, +\infty]^{\mathbb{N}}$.

Consideramos el espacio de medida $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \nu)$, donde ν es la medida de conteo:

$$\nu(A) := \begin{cases} |A|, & \text{si } A \text{ es finito;} \\ +\infty, & \text{si } A \text{ es infinito.} \end{cases}$$

Recordamos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n.$

Demostrar que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \int_{\mathbb{N}} a \, \mathrm{d}\nu.}$$

Ejercicio: intercambio del orden de series de números positivos

Sea $(a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}} \in [0,+\infty]^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ una familia de números no negativos. Demostrar que

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{j,k},$$

usando el resultado del ejercicio anterior y el teorema $\int\sum = \sum\int$.

Escribir razonamientos muy detallados.

$$f_n := ?.$$

Ejercicio. Mostrar que del teorema $\int^{(2)} \sum = \sum \int^{(2)}$ se puede deducir el TCM.

En otras palabras, estos dos resultados son equivalentes.

Teorema (de la convergencia decreciente)

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])^{\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones que decrece en cada punto:

$$\forall x \in X \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad f_n(x) \geq f_{n+1}(x).$$

Supongamos que $f_1 \in \mathcal{L}^1(X, \mu, [0, +\infty])$. Sea $g\colon X \to [0, +\infty]$ la función límite:

$$\forall x \in X \qquad g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Ejercicio. Demostrar el teorema de la convergencia decreciente usando el TCM.

Ejercicio. Mostrar que en el teorema de la convergencia decreciente la condición

$$f_1 \in \mathcal{L}^1(X, \mu, [0, +\infty])$$

no se puede omitir.