Integral de Lebesgue de la suma finita o numerable de funciones medibles positivas

Objetivos. Demostrar que la integral de una serie de funciones medibles positivas es igual a la suma de la serie de las integrales.

Requisitos. Teorema de convergencia monótona.

1. Lema (integral de la suma de dos funciones medibles positivas). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu.$$

Demostración. Idea: aproximar f y g por sucesiones crecientes de funciones simples, luego aplicar el teorema de convergencia monótona.

Sean $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones crecientes de funciones positivas simples $\mathcal{F}$-medibles tales que $s_n \to f$, $t_n \to g$. Entonces $(s_n + t_n) \to f + g$. Por la propiedad aditiva de la integral en el caso de funciones simples positivas,

$$\int_X (s_n + t_n)\, d\mu = \int_X s_n\, d\mu + \int_X t_n\, d\mu.$$

Pasamos al límite aplicando el teorema de convergencia monótona:

$$\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu. \qquad \square$$

2. Teorema (integral de una serie de funciones medibles positivas). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, y sea

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad \forall x \in X.$$

Entonces

$$\int_X g\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

Demostración. Idea: aplicar el teorema de convergencia monótona a sumas parciales.

Consideremos sumas parciales de la serie de funciones dada:

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} f_k.$$

Como $f_k \geq 0$ para todo k, la sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente. Por el teorema de convergencia monótona,

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} h_n\right) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X h_n\, d\mu.$$

El lado izquierdo es $\int_X g\, d\mu$. Por el lema, el lado derecho es

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k\, d\mu,$$

esto es, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. □

3. Proposición: serie numérica positive se puede ver como una integral de Lebesgue. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $[0,+\infty]$, es decir, $a\colon \mathbb{N} \to [0,+\infty]$. Consideremos $\mathbb{N}$ como un espacio de medida: $(\mathbb{N}, \mathcal{F}, \mu)$, donde $\mathcal{F} = 2^{\mathbb{N}}$ y μ es la medida de conteo:

$$\mu(A) \coloneqq \begin{cases} |A|, & \text{si } A \text{ es finito;} \\ +\infty, & \text{si } A \text{ es infinito.} \end{cases}$$

Recordamos que la suma de la serie se define como el límite de las sumas parciales:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \coloneqq \lim_{k\to\infty} \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\leq k}} a_n.$$

Demuestre que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \int_{\mathbb{N}} a\, d\mu.$$

4. Corolario (intercambio de sumas en una serie doble de números positivos). Sean $a_{i,j} \geq 0$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j}.$$

5. Ejercicio. Demostrar el corolario con todos los detalles.

6. Teorema de Convergencia Decreciente. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)^{\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones que decrece en cada punto:

$$\forall x \in X \qquad f_1(x) \geq f_2(x) \geq \ldots \geq 0.$$

Supóngase que $f_1 \in L^1(X, \mu, \overline{\mathbb{R}}_+)$. Sea $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ la función límite:

$$\forall x \in X \qquad g(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

7. Muestre con un ejemplo que la condición "$f_1 \in L^1(X, \mu, \overline{\mathbb{R}}_+)$" en el teorema anterior no se puede omitir.