Integral de Lebesgue de la suma finita o numerable de funciones medibles positivas

Objetivos. Demostrar que la integral de una serie de funciones medibles positivas es igual a la suma de la serie de las integrales.

Requisitos. Teorema de la convergencia monótona de Lebesgue.

1 Proposición (la integral de la suma de dos funciones medibles positivas)**.** *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida y sean* $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. *Entonces*

$$\int_X (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu + \int_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Idea: aproximar f y g por sucesiones crecientes de funciones simples medibles positivas, luego aplicar el teorema de la convergencia monótona.

Sean $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones crecientes de funciones positivas simples $\mathcal{F}$-medibles tales que $s_n \to f$, $t_n \to g$. Entonces $(s_n + t_n) \to f + g$. Por la propiedad aditiva de la integral en el caso de funciones simples positivas,

$$\int_X (s_n + t_n)\,\mathrm{d}\mu = \int_X s_n\,\mathrm{d}\mu + \int_X t_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Cuando n crece, cada una de estas integrales crece, por eso existen sus límites, cuando $n \to \infty$. Pasamos al límite, cuando $n \to \infty$. Aplicamos el teorema sobre el límite de la suma:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X (s_n + t_n)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n\,\mathrm{d}\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X t_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Aplicamos el teorema de convergencia monótona a cada una de las sucesines $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(s_n + t_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Obtenemos

$$\int_X (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu + \int_X g\,\mathrm{d}\mu. \qquad \square$$

2 Teorema (la integral de una serie de funciones medibles positivas)**.** *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida, sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])^{\mathbb{N}}$, *y sea*

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad \forall x \in X.$$

Entonces

$$\int_X g\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Idea: aplicar el teorema de la convergencia monótona a las sumas parciales.

Consideremos las sumas parciales de la serie de funciones dada:

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} f_k.$$

Como $f_k \geq 0$ para todo k, la sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente. Por el teorema de la convergencia monótona,

$$\int\limits_X \left(\lim_{n\to\infty} h_n\right) \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X h_n \, \mathrm{d}\mu.$$

El lado izquierdo es $\int_X g \, \mathrm{d}\mu$. Por la Proposición 1, el lado derecho es

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_X f_k \, \mathrm{d}\mu,$$

esto es, $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$. □

3 Ejercicio (cada serie numérica positiva se puede ver como una integral de Lebesgue)**.** Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $[0, +\infty]$, es decir, una función $a\colon \mathbb{N} \to [0, +\infty]$. Consideremos $\mathbb{N}$ como un espacio de medida: $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \nu)$, donde ν es la medida de conteo:

$$\nu(A) := \begin{cases} |A|, & \text{si } A \text{ es finito;} \\ +\infty, & \text{si } A \text{ es infinito.} \end{cases}$$

Recordamos que la suma de la serie se define como el límite de las sumas parciales:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n.$$

Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \int\limits_{\mathbb{N}} a \, \mathrm{d}\nu.$$

4 Ejercicio (intercambio de sumas en una serie doble de números positivos)**.** Sea $(a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$ una familia de números no negativos. Demostrar que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{j,k},$$

usando el resultado del Ejercicio 3 y el Teorema 2. Escribir razonamientos muy detallados.

5 Teorema (de la convergencia decreciente)**.** *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida y sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])^{\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones que decrece en cada punto:*

$$\forall x \in X \qquad f_1(x) \geq f_2(x) \geq \ldots \geq 0.$$

Supongamos que $f_1 \in L^1(X, \mu, [0, +\infty])$*. Sea* $g\colon X \to [0, +\infty]$ *la función límite:*

$$\forall x \in X \qquad g(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

6 Ejercicio. Demostrar el Teorema 5.

7 Ejercicio. Mostrar con un ejemplo que la condición “$f_1 \in L^1(X, \mu, [0, +\infty])$” en el teorema anterior no se puede omitir.