La integral de Lebesgue de functiones reales (un tema de análisis real)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas, México

18 de junio de 2024

Plan

Plan

Objetivos de esta clase:

- definir la integral de Lebesgue de funciones reales;
- estudiar sus propiedades elementales.

Etapas de la definición de la integral de Lebesgue

Etapas de la definición de la integral de Lebesgue

- $\displaystyle\int_X^{(1)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,

Etapas de la definición de la integral de Lebesgue

- $\displaystyle\int_X^{(1)} f \,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,
- $\displaystyle\int_X^{(2)} f \,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,

Etapas de la definición de la integral de Lebesgue

- $\displaystyle\int_X^{(1)} f \, \mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,
- $\displaystyle\int_X^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,
- $\displaystyle\int_X^{(3)} f \, \mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ con $\displaystyle\int_X^{(2)} |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty$,

Etapas de la definición de la integral de Lebesgue

- $\displaystyle\int_X^{(1)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,
- $\displaystyle\int_X^{(2)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,
- $\displaystyle\int_X^{(3)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ con $\displaystyle\int_X^{(2)} |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$,
- $\displaystyle\int_X^{(4)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ con $\displaystyle\int_X^{(2)} |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$.

Etapas de la definición de la integral de Lebesgue

- $\displaystyle\int_X^{(1)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,
- $\displaystyle\int_X^{(2)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,
- $\displaystyle\int_X^{(3)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ con $\displaystyle\int_X^{(2)} |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$,
- $\displaystyle\int_X^{(4)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ con $\displaystyle\int_X^{(2)} |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$.

En esta clase explicamos rápidamente la etapa 3.

Prerrequisitos:

- la integral de Lebesgue de funciones positivas medibles, la denotamos por $\int^{(2)}$;
- la propiedad monótona de la integral $\int^{(2)}$;
- la propiedad aditiva de la integral $\int^{(2)}$;
- la propiedad homogénea positiva de la integral $\int^{(2)}$;

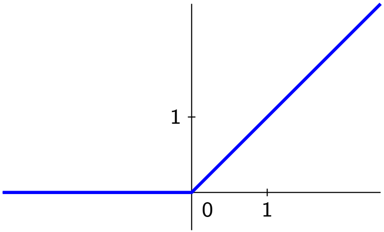
- la parte positiva y negativa de un número real;
- el valor absoluto de un número real;
- la parte positiva y negativa de una función.

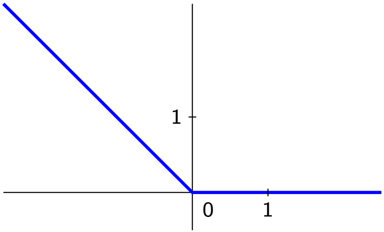
Plan

La parte positiva y negativa de números reales, repaso

Definimos $P\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$, $N\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$,

$$P(t) := \begin{cases} t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \qquad N(t) := \begin{cases} 0, & t \geq 0, \\ -t, & t < 0. \end{cases}$$





La terminología es un poco confusa:
la parte negativa de t, denotada por $N(t)$, es un número no negativo.

De manera similar, la parte imaginaria de un número complejo es un número real.

Propiedades de las funciones P y N, repaso

$$P(t) := \begin{cases} t, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \qquad N(t) := \begin{cases} 0, & t \ge 0, \\ -t, & t < 0. \end{cases}$$

Ejercicio. Demostrar que para cualquier t en $\mathbb{R}$,

$$P(t) - N(t) = t, \quad P(t) + N(t) = |t|, \qquad P(t) = \frac{|t| + t}{2}, \quad N(t) = \frac{|t| - t}{2},$$

$$P(t) = \max\{t, 0\}, \qquad N(t) = \max\{-t, 0\}.$$

Demostrar que las funciones P y N son continuas.

Cotas superiores para P y N

Proposición

Para cada t en $\mathbb{R}$,

$$P(t) \leq |t|, \qquad N(t) \leq |t|.$$

Cotas superiores para P y N

Proposición

Para cada t en $\mathbb{R}$,

$$P(t) \leq |t|, \qquad N(t) \leq |t|.$$

Demostración: se sigue de la fórmula

$$P(t) + N(t) = |t|.$$

La parte positiva y la parte negativa de una función

Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$. Definimos $f_+\colon X \to [0,+\infty)$, $f_-\colon X \to [0,+\infty)$,

$$f_+ \coloneqq P \circ f, \qquad f_- \coloneqq N \circ f.$$

En otras palabras,

$$f_+(x) \coloneqq P(f(x)), \qquad f_-(x) \coloneqq N(f(x)) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Propiedades de la parte positiva y negativa de una función

Ejercicios. Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$. Demostrar que

$$f_+(x) = \begin{cases} f(t), & f(t) \geq 0, \\ 0, & f(t) < 0; \end{cases} \qquad f_-(t) := \begin{cases} -f(t), & f(t) \leq 0, \\ 0, & f(t) > 0. \end{cases}$$

Demostrar que

$$f = f_+ - f_-, \qquad |f| = f_+ + f_-, \qquad f_+ = \frac{f + |f|}{2}, \qquad f_- = \frac{|f| - f}{2}.$$

Demostrar que

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\}, \qquad f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

La medibilidad de la parte positiva y negativa de una función medible

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$.
Entonces $f_+, f_- \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$.

Demostración. Como $P, N \in C(\mathbb{R}, [0, +\infty))$, tenemos

$$P, N \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, [0, +\infty), \mathcal{B}_{[0,+\infty)}).$$

Además, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Luego

$$P \circ f, N \circ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty), \mathcal{B}_{[0,+\infty)}).$$

La medibilidad de la parte positiva y negativa de una función medible

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Supongamos que $f_+, f_- \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$. Entonces $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$.

La medibilidad de la parte positiva y negativa de una función medible

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$.
Supongamos que $f_+, f_- \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$. Entonces $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$.

Plan de demostración.

$$A := \{x \in X\colon\ f(x) \geq 0\}, \qquad B := \{x \in X\colon\ f(x) < 0\}.$$

I. Demostrar que $A, B \in \mathcal{F}$.
II. Demostrar que $f|_A, f|_B \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$.
III. Demostrar que $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$.

Situación con la medibilidad de $|f|$, f_+ y f_-

La condición $|f| \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ no es equivalente a la condición

$$f_+ \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)) \qquad \wedge \qquad f_- \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)).$$

Ejemplo. Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible tal que $\mathcal{F} \neq 2^X$, y sea $Y \subseteq X$ tal que $Y \notin \mathcal{F}$.

Definimos $f : X \to \mathbb{R}$ mediante la regla

$$f := \mathbb{1}_Y - \mathbb{1}_{X \setminus Y}, \qquad \text{esto es,} \qquad f := 1 \cdot \mathbb{1}_Y + (-1) \cdot \mathbb{1}_{X \setminus Y}.$$

Entonces f, f_+, f_- no son medibles, pero $|f|$ es la constante 1 y es medible.

Cotas superiores para la parte positiva y negativa de una función

Proposición

Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$. Entonces

$$0 \le f_+ \le |f|, \qquad 0 \le f_- \le |f|.$$

Cotas superiores para la parte positiva y negativa de una función

Proposición

Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$. Entonces

$$0 \le f_+ \le |f|, \qquad 0 \le f_- \le |f|.$$

Demostración. Se sigue de la fórmula

$$|f| = f_+ + f_-$$

o de las desigualdades $P(t) \le |t|$, $N(t) \le |t|$.

Plan

Notación para la integral de funciones medibles positivas

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

Notación para la integral de funciones medibles positivas

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

Dada f en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, denotamos su integral de Lebesgue por $\int_X^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu$.

Notación para la integral de funciones medibles positivas

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

Dada f en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, denotamos su integral de Lebesgue por $\int_X^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu$.

Pongamos

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty]) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty]) \colon \int_X^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

Relaciones entre la integrabilidad de f_+, f_- y $|f|$

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. Entonces

$$\int_X^{(2)} |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_X^{(2)} f_+ \, \mathrm{d}\mu < +\infty \quad \wedge \quad \int_X^{(2)} f_- \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Relaciones entre la integrabilidad de f_+, f_- y $|f|$

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. Entonces

$$\int_X^{(2)} |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_X^{(2)} f_+\,\mathrm{d}\mu < +\infty \quad \wedge \quad \int_X^{(2)} f_-\,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Demostración. Usar las fórmulas

$$|f| = f_+ + f_-, \qquad f_+ \le |f|, \qquad f_- \le |f|,$$

la propiedad monótona de $\int^{(2)}$ y la propiedad aditiva de $\int^{(2)}$.

Funciones reales integrables, la integral para funciones reales

Definición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}) : \quad \int_X^{(2)} |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

Funciones reales integrables, la integral para funciones reales

Definición

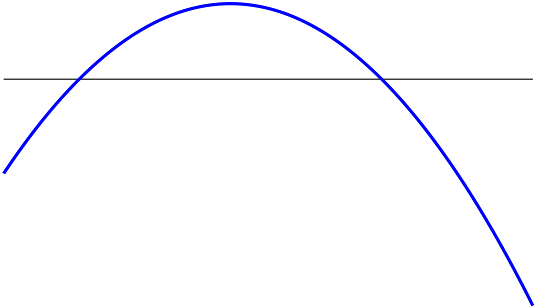
Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})\colon \quad \int_X^{(2)} |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

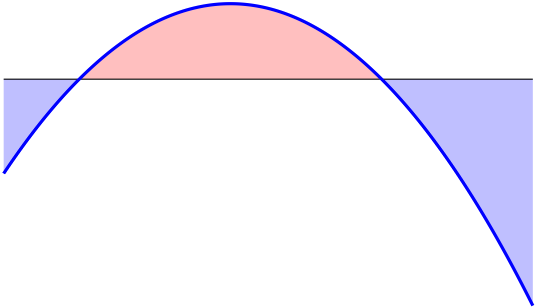
Definición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Para cada f en $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$,

$$\int_X^{(3)} f \, \mathrm{d}\mu := \int_X^{(2)} f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X^{(2)} f_- \, \mathrm{d}\mu.$$



$$\int_X^{(3)} f \,\mathrm{d}\mu := \int_X^{(2)} (P \circ f) \,\mathrm{d}\mu - \int_X^{(2)} (N \circ f) \,\mathrm{d}\mu.$$



$$\int_X^{(3)} f \, \mathrm{d}\mu := \int_X^{(2)} (P \circ f) \, \mathrm{d}\mu - \int_X^{(2)} (N \circ f) \, \mathrm{d}\mu.$$

$\int^{(2)} = \int^{(3)}$ para funciones positivas medibles integrables

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ tal que

$$\int_X^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Entonces

$$\int_X^{(3)} f \, \mathrm{d}\mu = \int_X^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu.$$

$\int^{(2)} = \int^{(3)}$ para funciones positivas medibles integrables

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ tal que

$$\int_X^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Entonces

$$\int_X^{(3)} f \, \mathrm{d}\mu = \int_X^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración.

$$f_+ = f, \qquad f_- = 0_X.$$

Proposición (un subespacio de un espacio de medida, repaso)

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, y sea $A \in \mathcal{F}$. Definimos

$$\mathcal{F}_A \coloneqq \{B \in \mathcal{F} \colon \ B \subseteq A\}, \qquad \mu_A \coloneqq \mu|_{\mathcal{F}_A}.$$

Entonces $(A, \mathcal{F}_A, \mu_A)$ es un espacio de medida.

Proposición (un subespacio de un espacio de medida, repaso)

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, y sea $A \in \mathcal{F}$. Definimos

$$\mathcal{F}_A \coloneqq \{B \in \mathcal{F} \colon \; B \subseteq A\}, \qquad \mu_A \coloneqq \mu|_{\mathcal{F}_A}.$$

Entonces $(A, \mathcal{F}_A, \mu_A)$ es un espacio de medida.

Proposición (sobre la medibilidad de la función restringida, repaso)

Sean $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{H})$ espacios medibles, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y, \mathcal{H})$, $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$f|_A \in \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_A, Y, \mathcal{H}).$$

Integración de funciones reales sobre un subconjunto

Definición

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$, $A \in \mathcal{F}$.

$$\int_A^{(3)} f \, \mathrm{d}\mu = \int_X^{(3)} f|_A \, \mathrm{d}\mu_A.$$

Integración de funciones reales sobre un subconjunto

Definición

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$, $A \in \mathcal{F}$.

$$\int_A^{(3)} f \, \mathrm{d}\mu = \int_X^{(3)} f|_A \, \mathrm{d}\mu_A.$$

Ejercicio. Demostrar que

$$\int_A^{(3)} f \, \mathrm{d}\mu = \int_A^{(2)} f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int_A^{(2)} f_- \, \mathrm{d}\mu, \qquad \int_A^{(3)} f \, \mathrm{d}\mu = \int_X^{(3)} \mathbb{1}_A \, f \, \mathrm{d}\mu.$$

Plan

La parte positiva, la parte negativa y la multiplicación por escalares

Ejercicio. Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$.
Expresar $(\alpha f)_+$ y $(\alpha f)_-$ en términos de f_+ y f_-.

Sugerencia: considerar pos separado los casos $\alpha \geq 0$ y $\alpha < 0$.

La propiedad homogénea de $\int^{(3)}$

Proposición

Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces $\alpha f \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{R})$ y

$$\int_X (\alpha f)\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_X f\,\mathrm{d}\mu.$$

Ejemplo cuando $(f+g)_+$ no coincide con $f_+ + g_+$

Ejercicio. Construir $t, u \in \mathbb{R}$ tales que

$$P(t+u) \neq P(t) + P(u), \qquad N(t+u) \neq N(t) + N(u).$$

Este ejemplo se convierte fácilmente en un ejemplo con funciones constantes.
Proponemos construir un ejemplo más interesante.

Ejercicio. Construir funciones continuas no constantes $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$\forall x \in X \quad \Big((f+g)_+(x) \neq f_+(x) + g_+(x) \quad \wedge \quad (f+g)_-(x) \neq f_-(x) + g_-(x) \Big).$$

(Comentario: evitamos la notación confusa $f \neq g$ para funciones.)

Propiedad aditiva de $\int^{(3)}$

Teorema

Sean $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$. Entonces $f + g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$ y

$$\int_X (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu + \int_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

Inicio de la demostración

Notamos que

$$|f + g| \leq$$

Inicio de la demostración

Notamos que

$$|f+g| \leq |f|+|g|.$$

Inicio de la demostración

Notamos que

$$|f+g| \leq |f| + |g|.$$

Luego, por la propiedad monótona y aditiva de $\int^{(2)}$,

$$\int_X^{(2)} |f+g| \, \mathrm{d}\mu \leq$$

Inicio de la demostración

Notamos que

$$|f+g| \leq |f| + |g|.$$

Luego, por la propiedad monótona y aditiva de $\int^{(2)}$,

$$\int_X^{(2)} |f+g| \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X^{(2)} (|f| + |g|) \, \mathrm{d}\mu =$$

Inicio de la demostración

Notamos que

$$|f+g| \leq |f|+|g|.$$

Luego, por la propiedad monótona y aditiva de $\int^{(2)}$,

$$\int_X^{(2)} |f+g| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X^{(2)} (|f|+|g|) \,\mathrm{d}\mu = \int_X^{(2)} |f| \,\mathrm{d}\mu + \int_X^{(2)} |g| \,\mathrm{d}\mu$$

Inicio de la demostración

Notamos que

$$|f+g| \leq |f| + |g|.$$

Luego, por la propiedad monótona y aditiva de $\int^{(2)}$,

$$\int_X^{(2)} |f+g| \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X^{(2)} (|f| + |g|) \, \mathrm{d}\mu = \int_X^{(2)} |f| \, \mathrm{d}\mu + \int_X^{(2)} |g| \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Concluimos que $f + g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$.

Parte principal de la demostración, un obstáculo

$$\int_X^{(3)} (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_X^{(2)} (f+g)_+\,\mathrm{d}\mu - \int_X^{(2)} (f+g)_-\,\mathrm{d}\mu = ???$$

Parte principal de la demostración, un obstáculo

$$\int_X^{(3)} (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_X^{(2)} (f+g)_+\,\mathrm{d}\mu - \int_X^{(2)} (f+g)_-\,\mathrm{d}\mu = \boxed{???}$$

¿Cómo continuar esta cadena de igualdades?

Parte principal de la demostración, un obstáculo

$$\int_X^{(3)} (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_X^{(2)} (f+g)_+\,\mathrm{d}\mu - \int_X^{(2)} (f+g)_-\,\mathrm{d}\mu = ???$$

¿Cómo continuar esta cadena de igualdades?

Ya sabemos que $(f+g)_+$ no es lo mismo que $f_+ + g_+$,
y $(f+g)_-$ no es lo mismo que $f_- + g_-$.

Parte principal de la demostración, el trucazo

Parte principal de la demostración, el trucazo

Empezamos con la siguiente identidad:

$$(f+g)_+ - (f+g)_-$$

Parte principal de la demostración, el trucazo

Empezamos con la siguiente identidad:

$$(f+g)_+ - (f+g)_- =$$

Parte principal de la demostración, el trucazo

Empezamos con la siguiente identidad:

$$(f+g)_+ - (f+g)_- = f+g$$

Parte principal de la demostración, el trucazo

Empezamos con la siguiente identidad:

$$(f+g)_+ - (f+g)_- = f+g =$$

Parte principal de la demostración, el trucazo

Empezamos con la siguiente identidad:

$$(f+g)_+ - (f+g)_- = f+g = f_+ - f_- + g_+ - g_-,$$

Parte principal de la demostración, el trucazo

Empezamos con la siguiente identidad:

$$(f+g)_+ - (f+g)_- = f+g = f_+ - f_- + g_+ - g_-,$$

esto es,

$$(f+g)_+ - (f+g)_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-.$$

Parte principal de la demostración, el trucazo

Empezamos con la siguiente identidad:

$$(f+g)_+ - (f+g)_- = f+g = f_+ - f_- + g_+ - g_-,$$

esto es,

$$(f+g)_+ - (f+g)_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-.$$

Pasamos los sumandos f_- y g_- al lado izquierdo, y $(f+g)_-$ al lado derecho.

$$(f+g)_+ + f_- + g_- = (f+g)_- + f_+ + g_+.$$

En ambos lados de la última igualdad están sumas de funciones positivas.

Final de la demostración

$$(f+g)_+ + f_- + g_- = (f+g)_- + f_+ + g_+.$$

Aplicamos la propiedad aditiva de $\int^{(2)}$. Por la brevedad, omitimos $\mathrm{d}\mu$.

$$\int_X^{(2)} (f+g)_+ + \int_X^{(2)} f_- + \int_X^{(2)} g_- = \int_X^{(2)} (f+g)_- + \int_X^{(2)} f_+ + \int_X^{(2)} g_+.$$

Todos los sumandos son finitos, por eso podemos pasarlos a otros lados de la igualdad:

$$\int_X^{(2)} (f+g)_+ - \int_X^{(2)} (f+g)_- = \int_X^{(2)} f_+ - \int_X^{(2)} f_- + \int_X^{(2)} g_+ - \int_X^{(2)} g_-.$$

Aplicamos la definición de $\int^{(3)}$ y obtenemos el resultado deseado.

La propiedad creciente de $\int^{(3)}$

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$ tales que $f \leq g$. Entonces

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

La propiedad creciente de $\int^{(3)}$

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$ tales que $f \leq g$. Entonces

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Idea de demostración. Consideramos $h = g - f$.

La propiedad creciente de $\int^{(3)}$

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$ tales que $f \le g$. Entonces

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \le \int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

Idea de demostración. Consideramos $h = g - f$. Entonces $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$

La propiedad creciente de $\int^{(3)}$

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$ tales que $f \le g$. Entonces

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \le \int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

Idea de demostración. Consideramos $h = g - f$. Entonces $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y

$$\int_X^{(3)} h \,\mathrm{d}\mu =$$

La propiedad creciente de $\int^{(3)}$

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$ tales que $f \le g$. Entonces

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \le \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Idea de demostración. Consideramos $h = g - f$. Entonces $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y

$$\int_X^{(3)} h \, \mathrm{d}\mu = \int_X^{(2)} h \, \mathrm{d}\mu$$

La propiedad creciente de $\int^{(3)}$

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$ tales que $f \le g$. Entonces

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \le \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Idea de demostración. Consideramos $h = g - f$. Entonces $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y

$$\int_X^{(3)} h \, \mathrm{d}\mu = \int_X^{(2)} h \, \mathrm{d}\mu \ge 0.$$

La propiedad creciente de $\int^{(3)}$

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$ tales que $f \le g$. Entonces

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \le \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Idea de demostración. Consideramos $h = g - f$. Entonces $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y

$$\int_X^{(3)} h \, \mathrm{d}\mu = \int_X^{(2)} h \, \mathrm{d}\mu \ge 0.$$

Luego escribimos g como

La propiedad creciente de $\int^{(3)}$

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$ tales que $f \le g$. Entonces

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \le \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Idea de demostración. Consideramos $h = g - f$. Entonces $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y

$$\int_X^{(3)} h \, \mathrm{d}\mu = \int_X^{(2)} h \, \mathrm{d}\mu \ge 0.$$

Luego escribimos g como $f + h$

La propiedad creciente de $\int^{(3)}$

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$ tales que $f \le g$. Entonces

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \le \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Idea de demostración. Consideramos $h = g - f$. Entonces $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y

$$\int_X^{(3)} h \, \mathrm{d}\mu = \int_X^{(2)} h \, \mathrm{d}\mu \ge 0.$$

Luego escribimos g como $f + h$ y aplicamos

La propiedad creciente de $\int^{(3)}$

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$ tales que $f \le g$. Entonces

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu \le \int_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

Idea de demostración. Consideramos $h = g - f$. Entonces $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y

$$\int_X^{(3)} h\,\mathrm{d}\mu = \int_X^{(2)} h\,\mathrm{d}\mu \ge 0.$$

Luego escribimos g como $f + h$ y aplicamos la propiedad aditiva de $\int^{(3)}$.