El espacio L^∞ es completo

(un tema de la unidad "Espacios L^p")

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

18 de octubre de 2022

Plan

Objetivo:

- demostrar que el espacio normado $L^\infty(X,\mu) = L^\infty(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C})$ es completo, donde $(X,\mathcal{F},\mu)$ es un espacio de medida.

Prerrequisitos:

- espacios métricos completos;
- sucesiones regulares de Cauchy;
- definición del espacio $L^\infty(X,\mu)$.

Funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

Funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ o brevemente $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$: funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$.

Funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ o brevemente $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$: funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ es un subespacio vectorial del espacio $\mathbb{C}^X$.

Funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ o brevemente $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$: funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ es un subespacio vectorial del espacio $\mathbb{C}^X$.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ es cerrado respecto a las operaciones punto a punto:

$$(f + g)(x) \coloneqq f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) \coloneqq \lambda f(x).$$

Funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ o brevemente $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$: funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ es un subespacio vectorial del espacio $\mathbb{C}^X$.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ es cerrado respecto a las operaciones punto a punto:

$$(f + g)(x) \coloneqq f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) \coloneqq \lambda f(x).$$

$0_X \coloneqq$ la función constante cero.

Funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ o brevemente $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$: funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ es un subespacio vectorial del espacio $\mathbb{C}^X$.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ es cerrado respecto a las operaciones punto a punto:

$$(f + g)(x) \coloneqq f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) \coloneqq \lambda f(x).$$

$0_X \coloneqq$ la función constante cero.

$0_X \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$.

Repaso: el supremo esencial de funciones positivas

Definición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Denotamos por $S_{h,\mu}$ el conjunto de las cotas superiores esenciales de h respecto μ:

$$S_{h,\mu} := \Big\{\xi \in [0, +\infty] \colon \quad \mu(\{x \in X \colon \; h(x) > \xi\}) = 0\Big\}.$$

Denotamos por $\operatorname{ess\,sup}_{X,\mu} h$ al supremo esencial de h respecto a μ:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} h := \inf(S_{h,\mu}).$$

Repaso: el supremo esencial de funciones positivas

Definición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Denotamos por $S_{h,\mu}$ el conjunto de las cotas superiores esenciales de h respecto μ:

$$S_{h,\mu} := \Big\{\xi \in [0, +\infty]\colon \quad \mu(\{x \in X\colon \ h(x) > \xi\}) = 0\Big\}.$$

Denotamos por $\operatorname{ess\,sup}_{X,\mu} h$ al supremo esencial de h respecto a μ:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} h := \inf(S_{h,\mu}).$$

Se puede demostrar que $\inf(S_{h,\mu}) \in S_{h,\mu}$. Por lo tanto, $\mu(\{x \in X\colon \ h(x) > \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} h\}) = 0.$

Proposición (una propiedad simple del supremo esencial)

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Supongamos que $\xi \geq 0$, $Y \in \mathcal{F}$, $\mu(X \setminus Y) = 0$ y

$$\forall x \in Y \qquad h(x) \leq \xi.$$

Entonces $\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} h \leq \xi$.

Proposición (una propiedad simple del supremo esencial)

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.
Supongamos que $\xi \geq 0$, $Y \in \mathcal{F}$, $\mu(X \setminus Y) = 0$ y

$$\forall x \in Y \qquad h(x) \leq \xi.$$

Entonces $\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} h \leq \xi$.

Demostración. En efecto,

$$\mu(\{x \in X\colon\ h(x) > \xi\})$$

Proposición (una propiedad simple del supremo esencial)

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Supongamos que $\xi \geq 0$, $Y \in \mathcal{F}$, $\mu(X \setminus Y) = 0$ y

$$\forall x \in Y \qquad h(x) \leq \xi.$$

Entonces $\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} h \leq \xi$.

Demostración. En efecto,

$$\mu(\{x \in X\colon\ h(x) > \xi\}) \ \leq$$

Proposición (una propiedad simple del supremo esencial)

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.
Supongamos que $\xi \geq 0$, $Y \in \mathcal{F}$, $\mu(X \setminus Y) = 0$ y

$$\forall x \in Y \qquad h(x) \leq \xi.$$

Entonces $\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} h \leq \xi$.

Demostración. En efecto,

$$\mu(\{x \in X\colon \ h(x) > \xi\}) \ \leq \ \mu(X \setminus Y)$$

Proposición (una propiedad simple del supremo esencial)

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Supongamos que $\xi \geq 0$, $Y \in \mathcal{F}$, $\mu(X \setminus Y) = 0$ y

$$\forall x \in Y \qquad h(x) \leq \xi.$$

Entonces $\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} h \leq \xi$.

Demostración. En efecto,

$$\mu(\{x \in X\colon\ h(x) > \xi\}) \ \leq \ \mu(X \setminus Y) \ =$$

Proposición (una propiedad simple del supremo esencial)

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Supongamos que $\xi \geq 0$, $Y \in \mathcal{F}$, $\mu(X \setminus Y) = 0$ y

$$\forall x \in Y \qquad h(x) \leq \xi.$$

Entonces $\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} h \leq \xi$.

Demostración. En efecto,

$$\mu(\{x \in X\colon\ h(x) > \xi\}) \ \leq\ \mu(X \setminus Y) \ =\ 0.$$

Proposición (una propiedad simple del supremo esencial)

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Supongamos que $\xi \geq 0$, $Y \in \mathcal{F}$, $\mu(X \setminus Y) = 0$ y

$$\forall x \in Y \qquad h(x) \leq \xi.$$

Entonces $\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} h \leq \xi$.

Demostración. En efecto,

$$\mu(\{x \in X\colon\ h(x) > \xi\}) \;\leq\; \mu(X \setminus Y) \;=\; 0.$$

Por lo tanto, $\xi \in S_{h,\mu}$.

Repaso: la seminorma extendida N_∞ y el espacio $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$

Para cada f en $\mathcal{M}(X,\mathcal{F})$, ponemos

$$N_\infty(f) := \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} |f|.$$

Repaso: la seminorma extendida N_∞ y el espacio $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$

Para cada f en $\mathcal{M}(X,\mathcal{F})$, ponemos

$$N_\infty(f) := \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} |f|.$$

Proposición

N_∞ es una seminorma extendida en $\mathcal{M}(X,\mathcal{F})$.

Repaso: la seminorma extendida N_∞ y el espacio $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$

Para cada f en $\mathcal{M}(X,\mathcal{F})$, ponemos

$$N_\infty(f) := \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} |f|.$$

Proposición

N_∞ es una seminorma extendida en $\mathcal{M}(X,\mathcal{F})$.

$$\mathcal{L}^\infty(X,\mu) \ := \ \Big\{ f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F}) \colon \ N_\infty(f) < +\infty \Big\}.$$

Repaso: la seminorma extendida N_∞ y el espacio $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$

Para cada f en $\mathcal{M}(X,\mathcal{F})$, ponemos

$$N_\infty(f) := \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} |f|.$$

Proposición

N_∞ es una seminorma extendida en $\mathcal{M}(X,\mathcal{F})$.

$$\mathcal{L}^\infty(X,\mu) \;:=\; \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F}) \colon\; N_\infty(f) < +\infty \right\}.$$

$\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ se considera con la función N_∞ restringida.

Repaso: la seminorma extendida N_∞ y el espacio $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$

Para cada f en $\mathcal{M}(X,\mathcal{F})$, ponemos

$$N_\infty(f) := \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} |f|.$$

Proposición

N_∞ es una seminorma extendida en $\mathcal{M}(X,\mathcal{F})$.

$$\mathcal{L}^\infty(X,\mu) \;:=\; \Big\{ f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F}) \colon\; N_\infty(f) < +\infty \Big\}.$$

$\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ se considera con la función N_∞ restringida.

$\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ es un espacio seminormado.

Repaso: definición del espacio L^∞

$$\mathcal{Z}(X,\mu) \coloneqq \{f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F})\colon \quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X\}.$$

Repaso: definición del espacio L^∞

$$\mathcal{Z}(X,\mu) := \{f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F})\colon \quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X\}.$$

Proposición

$\mathcal{Z}(X,\mu) = \{f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F})\colon\ N_\infty(f) = 0\}$.

$\mathcal{Z}(X,\mu)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.

Repaso: definición del espacio L^∞

$$\mathcal{Z}(X,\mu) := \{f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F}) \colon \quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X\}.$$

Proposición

$\mathcal{Z}(X,\mu) = \{f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F}) \colon \; N_\infty(f) = 0\}$.

$\mathcal{Z}(X,\mu)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.

Definición

$L^\infty(X,\mu) := \mathcal{L}^\infty(X,\mu)/\mathcal{Z}(X,\mu)$.

Repaso: la norma en $L^{\infty}(X, \mu)$

Proposición

Sea $F \in L^{\infty}(X, \mu)$ y sea $f \in F$. Entonces

$$\|F\|_{\infty} = N_{\infty}(f).$$

Repaso: la norma en $L^\infty(X,\mu)$

Proposición

Sea $F \in L^\infty(X,\mu)$ y sea $f \in F$. Entonces

$$\|F\|_\infty = N_\infty(f).$$

En otras palabras, para cada f en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$,

$$\|f + \mathcal{Z}(X,\mu)\|_\infty = N_\infty(f).$$

Repaso: sucesiones regulares de Cauchy

Sea (X, d) un espacio métrico o pseudométrico.

Repaso: sucesiones regulares de Cauchy

Sea (X, d) un espacio métrico o pseudométrico.

Sea $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$. Se dice que a es sucesión regular de Cauchy, si

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

Repaso: sucesiones regulares de Cauchy

Sea (X, d) un espacio métrico o pseudométrico.

Sea $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$. Se dice que a es sucesión regular de Cauchy, si

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad d(a_n, a_{n+1}) < 2^{-n-1}.$$

Repaso: sucesiones regulares de Cauchy

Sea (X, d) un espacio métrico o pseudométrico.

Sea $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$. Se dice que a es sucesión regular de Cauchy, si

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad d(a_n, a_{n+1}) < 2^{-n-1}.$$

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico o pseudométrico
y sea $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en X. Entonces

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall m \geq n \qquad d(a_n, a_m) \leq 2^{-n}.$$

Repaso: completez de espacios métricos o pseudométricos en términos de sucesiones regulares de Cauchy

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico o pseudométrico.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) (X, d) es completo;

(b) cada sucesión regular de Cauchy en (X, d) converge.

Plan

Completez del espacio $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Entonces el espacio $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ es completo.

Demostración: construcción del conjunto bueno

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.

Demostración: construcción del conjunto bueno

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.
Demostremos que esta sucesión tiene un límite en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.

Demostración: construcción del conjunto bueno

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.
Demostremos que esta sucesión tiene un límite en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.

Por la suposición,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} |f_n - f_{n+1}| = N_\infty(f_n - f_{n+1}) < 2^{-n-1}.$$

Demostración: construcción del conjunto bueno

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.
Demostremos que esta sucesión tiene un límite en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.

Por la suposición,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} |f_n - f_{n+1}| = N_\infty(f_n - f_{n+1}) < 2^{-n-1}.$$

Pongamos

$$L_n := \left\{x \in X\colon\ |f_n(x) - f_{n+1}(x)| \geq 2^{-n-1}\right\},$$

Demostración: construcción del conjunto bueno

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.
Demostremos que esta sucesión tiene un límite en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.

Por la suposición,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} |f_n - f_{n+1}| = N_\infty(f_n - f_{n+1}) < 2^{-n-1}.$$

Pongamos

$$L_n := \left\{x \in X\colon\ |f_n(x) - f_{n+1}(x)| \geq 2^{-n-1}\right\}, \qquad M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n,$$

Demostración: construcción del conjunto bueno

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.
Demostremos que esta sucesión tiene un límite en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.

Por la suposición,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} |f_n - f_{n+1}| = N_\infty(f_n - f_{n+1}) < 2^{-n-1}.$$

Pongamos

$$L_n := \left\{x \in X\colon\ |f_n(x) - f_{n+1}(x)| \ge 2^{-n-1}\right\}, \qquad M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n, \qquad Y := X \setminus M.$$

Demostración: construcción del conjunto bueno

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.
Demostremos que esta sucesión tiene un límite en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.

Por la suposición,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} |f_n - f_{n+1}| = N_\infty(f_n - f_{n+1}) < 2^{-n-1}.$$

Pongamos

$$L_n := \left\{x \in X\colon\ |f_n(x) - f_{n+1}(x)| \ge 2^{-n-1}\right\}, \qquad M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n, \qquad Y := X \setminus M.$$

Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ se tiene que $\mu(L_n) = 0$.

Demostración: construcción del conjunto bueno

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.
Demostremos que esta sucesión tiene un límite en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.

Por la suposición,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} |f_n - f_{n+1}| = N_\infty(f_n - f_{n+1}) < 2^{-n-1}.$$

Pongamos

$$L_n := \left\{x \in X\colon\ |f_n(x) - f_{n+1}(x)| \ge 2^{-n-1}\right\}, \qquad M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n, \qquad Y := X \setminus M.$$

Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ se tiene que $\mu(L_n) = 0$.

Por la propiedad σ-subaditiva, se sigue que $\mu(M) = 0$.

Demostración: convergencia puntual en el conjunto bueno

$$Y = X \setminus M$$

Demostración: convergencia puntual en el conjunto bueno

$$Y = X \setminus M =$$

Demostración: convergencia puntual en el conjunto bueno

$$Y = X \setminus M = \bigcap_{n \in \mathbb{N}}$$

Demostración: convergencia puntual en el conjunto bueno

$$Y = X \setminus M = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \in X \colon \ |f_n(x) - f_{n+1}(x)| < 2^{-n-1} \right\}.$$

Demostración: convergencia puntual en el conjunto bueno

$$Y \;=\; X \setminus M \;=\; \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \in X\colon\; |f_n(x) - f_{n+1}(x)| < 2^{-n-1}\right\}.$$

Luego

$$\forall x \in Y \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |f_n(x) - f_{n+1}(x)| < 2^{-n-1}.$$

Demostración: convergencia puntual en el conjunto bueno

$$Y \;=\; X \setminus M \;=\; \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{ x \in X\colon\; |f_n(x) - f_{n+1}(x)| < 2^{-n-1} \right\}.$$

Luego

$$\forall x \in Y \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |f_n(x) - f_{n+1}(x)| < 2^{-n-1}.$$

Para cada x en Y, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión regular de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Demostración: convergencia puntual en el conjunto bueno

$$Y = X \setminus M = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{ x \in X\colon\ |f_n(x) - f_{n+1}(x)| < 2^{-n-1} \right\}.$$

Luego

$$\forall x \in Y \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |f_n(x) - f_{n+1}(x)| < 2^{-n-1}.$$

Para cada x en Y, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión regular de Cauchy en $\mathbb{C}$.

El espacio métrico $\mathbb{C}$ es completo, por eso $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Demostración: convergencia puntual en el conjunto bueno

$$Y \;=\; X \setminus M \;=\; \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \in X\colon\; |f_n(x) - f_{n+1}(x)| < 2^{-n-1}\right\}.$$

Luego

$$\forall x \in Y \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |f_n(x) - f_{n+1}(x)| < 2^{-n-1}.$$

Para cada x en Y, $\;(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión regular de Cauchy en $\mathbb{C}$.

El espacio métrico $\mathbb{C}$ es completo, por eso $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Definimos $g\colon X \to \mathbb{C}$,

$$g(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), & x \in Y; \\ 0, & x \in M. \end{cases}$$

Demostración: acotación de $|f_n - g|$ casi en todos puntos

Como ya hemos notado,

$$\forall x \in Y \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |f_n(x) - f_{n+1}(x)| < 2^{-n-1}.$$

Demostración: acotación de $|f_n - g|$ casi en todos puntos

Como ya hemos notado,

$$\forall x \in Y \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |f_n(x) - f_{n+1}(x)| < 2^{-n-1}.$$

Por una propiedad de las sucesiones regulares de Cauchy,

$$\forall x \in Y \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall m \geq n \qquad |f_n(x) - f_m(x)|$$

Demostración: acotación de $|f_n - g|$ casi en todos puntos

Como ya hemos notado,

$$\forall x \in Y \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |f_n(x) - f_{n+1}(x)| < 2^{-n-1}.$$

Por una propiedad de las sucesiones regulares de Cauchy,

$$\forall x \in Y \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall m \geq n \qquad |f_n(x) - f_m(x)| \leq$$

Demostración: acotación de $|f_n - g|$ casi en todos puntos

Como ya hemos notado,

$$\forall x \in Y \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |f_n(x) - f_{n+1}(x)| < 2^{-n-1}.$$

Por una propiedad de las sucesiones regulares de Cauchy,

$$\forall x \in Y \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall m \geq n \qquad |f_n(x) - f_m(x)| \leq 2^{-n}.$$

Demostración: acotación de $|f_n - g|$ casi en todos puntos

Como ya hemos notado,

$$\forall x \in Y \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |f_n(x) - f_{n+1}(x)| < 2^{-n-1}.$$

Por una propiedad de las sucesiones regulares de Cauchy,

$$\forall x \in Y \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall m \geq n \qquad |f_n(x) - f_m(x)| \leq 2^{-n}.$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$:

$$\forall x \in Y \qquad |f_n(x) - g(x)| \leq 2^{-n}.$$

Demostración: acotación de $N_\infty(f_n - g)$

Hemos mostrado que

$$\forall x \in Y \qquad |f_n(x) - g(x)| \leq 2^{-n}.$$

Demostración: acotación de $N_\infty(f_n - g)$

Hemos mostrado que

$$\forall x \in Y \qquad |f_n(x) - g(x)| \leq 2^{-n}.$$

Luego

$$\{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| > 2^{-n}\} \subseteq M.$$

Demostración: acotación de $N_\infty(f_n - g)$

Hemos mostrado que

$$\forall x \in Y \qquad |f_n(x) - g(x)| \leq 2^{-n}.$$

Luego

$$\{x \in X : \ |f_n(x) - g(x)| > 2^{-n}\} \subseteq M.$$

Como $\mu(M) = 0$,

$$N_\infty(f_n - g) \leq 2^{-n}.$$

Demostración: $g \in \mathcal{L}^{\infty}(X, \mu)$

Hemos mostrado que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad N_{\infty}(f_n - g) \leq 2^{-n}.$$

Demostración: $g \in \mathcal{L}^\infty(X,\mu)$

Hemos mostrado que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad N_\infty(f_n - g) \leq 2^{-n}.$$

En particular, $N_\infty(f_1 - g) \leq 1/2$.

Demostración: $g \in \mathcal{L}^\infty(X,\mu)$

Hemos mostrado que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad N_\infty(f_n - g) \leq 2^{-n}.$$

En particular, $N_\infty(f_1 - g) \leq 1/2$. Luego

$$N_\infty(g) \;\leq\; N_\infty(g - f_1) + \mathcal{N}_\infty(f_1)$$

Demostración: $g \in \mathcal{L}^\infty(X,\mu)$

Hemos mostrado que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad N_\infty(f_n - g) \le 2^{-n}.$$

En particular, $N_\infty(f_1 - g) \le 1/2$. Luego

$$N_\infty(g) \;\le\; N_\infty(g - f_1) + \mathcal{N}_\infty(f_1) \;\le$$

Demostración: $g \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$

Hemos mostrado que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad N_\infty(f_n - g) \leq 2^{-n}.$$

En particular, $N_\infty(f_1 - g) \leq 1/2$. Luego

$$N_\infty(g) \ \leq \ N_\infty(g - f_1) + \mathcal{N}_\infty(f_1) \ \leq \ \frac{1}{2} + N_\infty(f_1) < +\infty.$$

Demostración: $g \in \mathcal{L}^\infty(X,\mu)$

Hemos mostrado que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad N_\infty(f_n - g) \le 2^{-n}.$$

En particular, $N_\infty(f_1 - g) \le 1/2$. Luego

$$N_\infty(g) \ \le \ N_\infty(g - f_1) + \mathcal{N}_\infty(f_1) \ \le \ \frac{1}{2} + N_\infty(f_1) < +\infty.$$

Luego $g \in \mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.

Demostración: $g \in \mathcal{L}^\infty(X,\mu)$

Hemos mostrado que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad N_\infty(f_n - g) \le 2^{-n}.$$

En particular, $N_\infty(f_1 - g) \le 1/2$. Luego

$$N_\infty(g) \;\le\; N_\infty(g - f_1) + \mathcal{N}_\infty(f_1) \;\le\; \frac{1}{2} + N_\infty(f_1) < +\infty.$$

Luego $g \in \mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.

Ahora podemos concluir que $\quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g \quad$ en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.

Completez del espacio $L^\infty(X, \mu)$

Teorema

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Entonces el espacio $L^\infty(X, \mu)$ es completo.

Completez del espacio $L^{\infty}(X,\mu)$

Teorema

Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ un espacio de medida. Entonces el espacio $L^{\infty}(X,\mu)$ es completo.

Podemos usar la proposición anterior y un hecho que demostramos antes:
si un espacio seminormado V es completo y W es un subespacio vectorial de V,
entonces V/W es completo.

Completez del espacio $L^\infty(X, \mu)$

Teorema

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Entonces el espacio $L^\infty(X, \mu)$ es completo.

Podemos usar la proposición anterior y un hecho que demostramos antes:
si un espacio seminormado V es completo y W es un subespacio vectorial de V,
entonces V/W es completo.

Sin embargo, escribamos una demostración directa.

Demostración

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $L^\infty(X,\mu)$.

Demostración

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $L^\infty(X,\mu)$.

Para cada n en $\mathbb{N}$, elegimos f_n en F_n. Entonces, como $f_n - f_{n+1} \in F_n - F_{n+1}$,

$$N_\infty(f_n - f_{n+1}) = \|F_n - F_{n+1}\|_\infty < 2^{-n-1}.$$

Demostración

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $L^\infty(X,\mu)$.

Para cada n en $\mathbb{N}$, elegimos f_n en F_n. Entonces, como $f_n - f_{n+1} \in F_n - F_{n+1}$,

$$N_\infty(f_n - f_{n+1}) = \|F_n - F_{n+1}\|_\infty < 2^{-n-1}.$$

Entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión regular de Cauchy en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.

Demostración

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $L^\infty(X,\mu)$.

Para cada n en $\mathbb{N}$, elegimos f_n en F_n. Entonces, como $f_n - f_{n+1} \in F_n - F_{n+1}$,

$$N_\infty(f_n - f_{n+1}) = \|F_n - F_{n+1}\|_\infty < 2^{-n-1}.$$

Entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión regular de Cauchy en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.

Por la proposición, existe g en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ tal que $N_\infty(f_n - g) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Demostración

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $L^\infty(X,\mu)$.

Para cada n en $\mathbb{N}$, elegimos f_n en F_n. Entonces, como $f_n - f_{n+1} \in F_n - F_{n+1}$,

$$N_\infty(f_n - f_{n+1}) = \|F_n - F_{n+1}\|_\infty < 2^{-n-1}.$$

Entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión regular de Cauchy en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.

Por la proposición, existe g en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ tal que $N_\infty(f_n - g) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Pongamos $G :=$

Demostración

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $L^\infty(X,\mu)$.

Para cada n en $\mathbb{N}$, elegimos f_n en F_n. Entonces, como $f_n - f_{n+1} \in F_n - F_{n+1}$,

$$N_\infty(f_n - f_{n+1}) = \|F_n - F_{n+1}\|_\infty < 2^{-n-1}.$$

Entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión regular de Cauchy en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.

Por la proposición, existe g en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ tal que $N_\infty(f_n - g) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Pongamos $G := g + \mathcal{Z}(X,\mu)$.

Demostración

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $L^\infty(X,\mu)$.

Para cada n en $\mathbb{N}$, elegimos f_n en F_n. Entonces, como $f_n - f_{n+1} \in F_n - F_{n+1}$,

$$N_\infty(f_n - f_{n+1}) = \|F_n - F_{n+1}\|_\infty < 2^{-n-1}.$$

Entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión regular de Cauchy en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.

Por la proposición, existe g en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ tal que $N_\infty(f_n - g) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Pongamos $G := g + \mathcal{Z}(X,\mu)$. Entonces $G \in L^\infty(X,\mu)$ y

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|F_n - G\|_\infty = N_\infty(f_n - g).$$

Por lo tanto, $F_n \xrightarrow[n\to\infty]{} G$ en $L^\infty(X,\mu)$.

Plan

Otras formas de demostración, sin usar sucesiones regulares de Cauchy

Podemos no usar sucesiones regulares de Cauchy.

La demostración se complica un poco, pero utiliza las mismas ideas.

Otras formas de demostración, sin usar sucesiones regulares de Cauchy

Podemos no usar sucesiones regulares de Cauchy.

La demostración se complica un poco, pero utiliza las mismas ideas.

Ejercicio. Suponer que $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.

Demostrar que existe g en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ tal que $N_\infty(f_n - g) \to 0$.

Usar el medidor de Cauchy: $\gamma_f(k) := \sup\{N_\infty(f_n - f_m)\colon\ m,n \geq k\}$.

Otras formas de demostración, sin usar sucesiones regulares de Cauchy

Podemos no usar sucesiones regulares de Cauchy.

La demostración se complica un poco, pero utiliza las mismas ideas.

Ejercicio. Suponer que $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.
Demostrar que existe g en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ tal que $N_\infty(f_n - g) \to 0$.
Usar el medidor de Cauchy: $\gamma_f(k) := \sup\{N_\infty(f_n - f_m)\colon\ m,n \geq k\}$.

Ejercicio. Suponer que $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.
Demostrar que existe g en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ tal que $N_\infty(f_n - g) \to 0$.
Trabajar con 4 cuantificadores:

$$\forall\varepsilon > 0 \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \forall m,n \geq k \qquad N_\infty(f_m - f_n) < \varepsilon.$$

Dividir la demostración en dos lemas

La demostración de la completez de $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ se puede dividir en dos lemas.

Dividir la demostración en dos lemas

La demostración de la completez de $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ se puede dividir en dos lemas.

Lema

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.

Entonces existe g en $\mathcal{M}(X,\mu)$ tal que $\quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g.$

Dividir la demostración en dos lemas

La demostración de la completez de $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ se puede dividir en dos lemas.

Lema

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$.

Entonces existe g en $\mathcal{M}(X,\mu)$ tal que $\quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

Lema

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ y sea g en $\mathcal{M}(X,\mu)$ tal que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g$.
Entonces $g\in\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ y $N_\infty(f_n-g)\to 0$ cuando $n\to\infty$.

Otra forma de la demostración: usar la completez de $B(Y)$

Ejercicio. Escribir la demostración de otra manera:

- definir los conjuntos M e Y, como en la demostración de arriba;
- mostrar que $(f_n|_Y)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión regular de Cauchy en $B(Y)$;
- usar la completez de $B(Y)$ y definir $h\colon Y \to \mathbb{C}$ como el límite de $(f_n|_Y)_{n\in\mathbb{N}}$ en $B(Y)$;
- definir $g\colon X \to \mathbb{C}$,
$$g(x) := \begin{cases} h(x), & x \in Y; \\ 0, & x \in M. \end{cases}$$
- mostrar que $g \in \mathcal{L}^\infty(X,\mathbb{C})$ y $N_\infty(f_n - g) \to 0$.