Los espacios L^∞ son completos

Objetivos. Demostrar que los espacios L^∞ son completos.

Requisitos. Definición de los espacios L^∞, criterio de completez de espacios métricos en términos de sucesiones regulares de Cauchy.

Repaso: completez de espacios métricos

1 Repaso (criterio de completitud para espacios métricos, en térmios de sucesiones regulares de Cauchy)**.** Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) (X, d) es completo;

(b) cualquier sucesión regular de Cauchy en (X, d) converge.

Repaso: definición del espacio L^∞

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Denotamos por $\mathcal{Z}(X, \mu)$ o simplemente por $\mathcal{Z}$ al siguiente conjunto de funciones:

$$\mathcal{Z} \coloneqq \{f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})\colon \quad f = 0 \quad \mu\text{-c.t.p.}\}.$$

Recordemos que L^∞ se define como el espacio cociente (espacio de clase de equivalencia) del espacio $\mathcal{L}^\infty$ sobre su subespacio $\mathcal{Z}$.

Completez del espacio L^∞

2 Teorema. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Entonces el espacio $L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ es completo.*

Demostración. Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en L^∞. Para cada n en $\mathbb{N}$ elegimos f_n en F_n. Entonces

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} |f_n - f_{n+1}| = \|F_n - F_{n+1}\|_\infty < 2^{-n-1}.$$

Pongamos

$$L_n \coloneqq \{x \in X\colon\ |f_n(x) - f_{n+1}(x)| \ge 2^{-n-1}\}, \qquad M \coloneqq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n, \qquad B \coloneqq X \setminus M.$$

Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ tenemos $\mu(L_n) = 0$, y por la propiedad σ-subaditiva se sigue que $\mu(M) = 0$. Por otro lado, para cada x en B y cada n en $\mathbb{N}$ se cumple la desigualdad

$$|f_n(x) - f_{n+1}(x)| < 2^{-n-1}.$$

Para cada x en B la sucesión numérica $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como el espacio métrico $\mathbb{C}$ es completo, esta sucesión converge a un número. Denotemos este número por $g(x)$. Además ponemos $g(x) = 0$ para x en M.

$$g(x) := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x), & x \in B; \\ 0, & x \in M. \end{cases}$$

Notamos que para cada x en B y cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \geq n$ se cumple la desigualdad

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq 2^{-n}.$$

Pasando al límite cuando $m \to \infty$ obtenemos

$$|f_n(x) - g(x)| \leq 2^{-n}.$$

Hemos demostrado esta desigualdad para cada x en B. Luego

$$\left\{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| > 2^{-n}\right\} \subseteq M,$$

y

$$\mathcal{N}_\infty(f_n - g) \leq 2^{-n}.$$

En particular, esto implica que $\mathcal{N}_\infty(g) \leq \mathcal{N}_\infty(f_1) + 1/2$. Pongamos $G := g + \mathcal{Z}$. Entonces $G \in L^\infty$ y $\|G - F_n\| \leq 2^{-n}$. Por lo tanto, la sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a G en $L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$. $\square$