Desigualdad de Hölder

(un tema de la unidad "Espacios L^p")

Egor Maximenko,

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

13 de septiembre de 2024

1. Introducción
2. Desigualdad de Hölder
3. Criterio de igualdad en la desigualdad de Hölder
4. El teorema inverso de Hölder

Plan

1. Introducción
2. Desigualdad de Hölder
3. Criterio de igualdad en la desigualdad de Hölder
4. El teorema inverso de Hölder

Objetivos:

- Demostrar la desigualdad de Hölder para funciones medibles sobre un espacio de medida.

$$\int_X |f|\,|g|\,\mathrm{d}\mu \leq \left(\int_X |f|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q}, \qquad \text{donde} \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

- Enunciar un criterio de igualdad en la desigualdad de Hölder.
- Enunciar el "teorema inverso de Hölder".

Aplicaciones

- La propiedad subaditiva de N_p (la desigualdad de Minkowski).
- La cota superior de Schur para los operadores integrales.
- La comparación de las seminormas N_p para $\mu(X) < +\infty$.
- Varias otras desigualdades integrales.

Prerrequisitos

- La desigualdad de Young: $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.
- La integral de Lebesgue.
- La desigualdad de Chebyshov–Márkov.

Repaso: funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

Repaso: funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \coloneqq$ el conjunto de las funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$.

Repaso: funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \coloneqq$ el conjunto de las funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ es un espacio vectorial complejo respecto a las operaciones punto a punto:

$$(f + g)(x) \coloneqq f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) \coloneqq \lambda f(x).$$

Repaso: funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \coloneqq$ el conjunto de las funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ es un espacio vectorial complejo respecto a las operaciones punto a punto:

$$(f + g)(x) \coloneqq f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) \coloneqq \lambda f(x).$$

El vector cero de este espacio es la función constante cero. La denotamos por 0_X.

La seminorma extendida N_p, $1 \leq p < +\infty$

Sea $p \in [1, +\infty)$. Definimos $N_p \colon \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \to [0, +\infty]$,

$$N_p(f) := \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

También se define $N_p(f)$ para f en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

La seminorma extendida N_p, $1 \leq p < +\infty$

Sea $p \in [1, +\infty)$. Definimos $N_p \colon \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \to [0, +\infty]$,

$$N_p(f) := \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

También se define $N_p(f)$ para f en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

En un futuro demostaremos que N_p es subaditiva (es la desigualdad de Minkowski).
Antes de esto, demostraremos la desigualdad de Hölder.

N_p es absolutamente homogénea

Ejercicio.

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $\alpha \geq 0$. Demostrar que

$$N_p(\alpha f) = \alpha \, N_p(f).$$

N_p es absolutamente homogénea

Ejercicio.

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $\alpha \geq 0$. Demostrar que

$$N_p(\alpha f) = \alpha \, N_p(f).$$

Ejercicio.

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Demostrar que

$$N_p(\lambda f) = |\lambda| \, N_p(f).$$

¿Cuándo $N_p(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

¿Cuándo $N_p(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} 0_X.$$

¿Cuándo $N_p(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=} 0_X.$$

Demostración de $\Longleftarrow$. Supongamos que $f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=} 0_X$.

$$A := \{x \in X : \quad f(x) \neq 0\}.$$

¿Cuándo $N_p(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=} 0_X.$$

Demostración de $\Longleftarrow$. Supongamos que $f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=} 0_X$.

$$A := \{x \in X : \quad f(x) \neq 0\}.$$

Entonces $\mu(A) = 0$ y

¿Cuándo $N_p(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=} 0_X.$$

Demostración de $\Longleftarrow$. Supongamos que $f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=} 0_X$.

$$A := \{x \in X : \quad f(x) \neq 0\}.$$

Entonces $\mu(A) = 0$ y $N_p^p(f)$

¿Cuándo $N_p(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} 0_X.$$

Demostración de $\Longleftarrow$. Supongamos que $f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} 0_X$.

$$A := \{x \in X : \quad f(x) \neq 0\}.$$

Entonces $\mu(A) = 0$ y $N_p^p(f) =$

¿Cuándo $N_p(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=} 0_X.$$

Demostración de $\Longleftarrow$. Supongamos que $f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=} 0_X$.

$$A := \{x \in X : \quad f(x) \neq 0\}.$$

Entonces $\mu(A) = 0$ y $N_p^p(f) = \displaystyle\int_X f^p \, \mathrm{d}\mu$

¿Cuándo $N_p(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=} 0_X.$$

Demostración de $\Longleftarrow$. Supongamos que $f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=} 0_X$.

$$A := \{x \in X : \quad f(x) \neq 0\}.$$

Entonces $\mu(A) = 0$ y $N_p^p(f) = \displaystyle\int_X f^p \, \mathrm{d}\mu =$

¿Cuándo $N_p(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} 0_X.$$

Demostración de $\Longleftarrow$. Supongamos que $f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} 0_X$.

$$A := \{x \in X : \quad f(x) \neq 0\}.$$

Entonces $\mu(A) = 0$ y $N_p^p(f) = \displaystyle\int_X f^p \, \mathrm{d}\mu = \int_{X \setminus A} f^p \, \mathrm{d}\mu + \int_A f^p \, \mathrm{d}\mu$

¿Cuándo $N_p(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} 0_X.$$

Demostración de $\Longleftarrow$. Supongamos que $f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} 0_X$.

$$A := \{x \in X : \quad f(x) \neq 0\}.$$

Entonces $\mu(A) = 0$ y $N_p^p(f) = \displaystyle\int_X f^p \, \mathrm{d}\mu = \int_{X \setminus A} f^p \, \mathrm{d}\mu + \int_A f^p \, \mathrm{d}\mu =$

¿Cuándo $N_p(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} 0_X.$$

Demostración de $\Longleftarrow$. Supongamos que $f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} 0_X$.

$$A := \{x \in X : \quad f(x) \neq 0\}.$$

Entonces $\mu(A) = 0$ y $N_p^p(f) = \displaystyle\int_X f^p \, \mathrm{d}\mu = \int_{X \setminus A} f^p \, \mathrm{d}\mu + \int_A f^p \, \mathrm{d}\mu = 0.$

Demostración de $\Longrightarrow$.

Supongamos que $N_p(f) = 0$.

$$A := \{x \in X : \quad f(x) > 0\}, \qquad B_m := \left\{x \in X : \quad f(x) \geq \frac{1}{m}\right\}.$$

Demostración de $\Longrightarrow$.

Supongamos que $N_p(f) = 0$.

$$A := \{x \in X : \quad f(x) > 0\}, \qquad B_m := \left\{x \in X : \quad f(x) \geq \frac{1}{m}\right\}.$$

Por la desigualdad de Chebyshov–Márkov,

$$\mu(B_m) = \mu\left(\left\{x \in X : \quad f^p(x) \geq \frac{1}{m^p}\right\}\right) \leq m^p \int_X f^p \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Demostración de $\Longrightarrow$.

Supongamos que $N_p(f) = 0$.

$$A := \{x \in X\colon \quad f(x) > 0\}, \qquad B_m := \left\{x \in X\colon \quad f(x) \geq \frac{1}{m}\right\}.$$

Por la desigualdad de Chebyshov–Márkov,

$$\mu(B_m) = \mu\left(\left\{x \in X\colon \quad f^p(x) \geq \frac{1}{m^p}\right\}\right) \leq m^p \int_X f^p \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Como $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$,

$$\mu(A) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(B_m) = 0.$$

Repaso: desigualdad de Young

Proposición

Sean $a, b \geq 0$, $p, q > 1$,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Repaso: desigualdad de Young

Proposición

Sean $a, b \geq 0$, $p, q > 1$,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Ejercicio. Demostrar esta desigualdad usando la convexidad de la función $\exp_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Plan

1. Introducción
2. Desigualdad de Hölder
3. Criterio de igualdad en la desigualdad de Hölder
4. El teorema inverso de Hölder

Desigualdad de Hölder para funciones medibles positivas

Teorema

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$N_1(f\, g) \leq N_p(f)\, N_q(g).$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, casos triviales

Por demostrar:

$$N_1(f\,g) \leq N_p(f)\,N_q(g).$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, casos triviales

Por demostrar:

$$N_1(f\,g) \leq N_p(f)\,N_q(g).$$

Caso $N_p(f) = 0$:

Demostración de la desigualdad de Hölder, casos triviales

Por demostrar:

$$N_1(f\,g) \;\leq\; N_p(f)\,N_q(g).$$

Caso $N_p(f) = 0$: $\quad f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} 0_X$, luego $N_1(f\,g) = 0$.

Demostración de la desigualdad de Hölder, casos triviales

Por demostrar:

$$N_1(f\,g) \;\leq\; N_p(f)\,N_q(g).$$

Caso $N_p(f) = 0$: $\quad f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} 0_X$, luego $N_1(f\,g) = 0$.

Caso $N_q(g) = 0$:

Demostración de la desigualdad de Hölder, casos triviales

Por demostrar:

$$N_1(f\,g) \;\leq\; N_p(f)\,N_q(g).$$

Caso $N_p(f) = 0$: $\quad f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} 0_X$, luego $N_1(f\,g) = 0$.

Caso $N_q(g) = 0$: $\quad g \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} 0_X$, luego $N_1(f\,g) = 0$.

Demostración de la desigualdad de Hölder, casos triviales

Por demostrar:

$$N_1(f\,g) \;\leq\; N_p(f)\,N_q(g).$$

Caso $N_p(f) = 0$: $\quad f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=} 0_X$, luego $N_1(f\,g) = 0$.

Caso $N_q(g) = 0$: $\quad g \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=} 0_X$, luego $N_1(f\,g) = 0$.

Caso $N_p(f) > 0$, $N_q(g) > 0$, $N_p(f) = +\infty$ o $N_q(g) = +\infty$:

Demostración de la desigualdad de Hölder, casos triviales

Por demostrar:

$$N_1(f\,g) \;\leq\; N_p(f)\,N_q(g).$$

Caso $N_p(f) = 0$: $\quad f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=} 0_X$, luego $N_1(f\,g) = 0$.

Caso $N_q(g) = 0$: $\quad g \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=} 0_X$, luego $N_1(f\,g) = 0$.

Caso $N_p(f) > 0$, $N_q(g) > 0$, $N_p(f) = +\infty$ o $N_q(g) = +\infty$: $\quad$ el lado derecho es $+\infty$.

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Supongamos $0 < N_p(f) < +\infty, \quad 0 < N_q(g) < +\infty.$

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Supongamos $0 < N_p(f) < +\infty, \quad 0 < N_q(g) < +\infty.$

Aplicamos la desigualdad de Young $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ con $a = \dfrac{f(x)}{N_p(f)}, \quad b = \dfrac{g(x)}{N_q(g)}$:

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Supongamos $0 < N_p(f) < +\infty, \quad 0 < N_q(g) < +\infty.$

Aplicamos la desigualdad de Young $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ con $a = \dfrac{f(x)}{N_p(f)}, \quad b = \dfrac{g(x)}{N_q(g)}$:

$$\frac{f(x)\, g(x)}{N_p(f) N_q(g)}$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Supongamos $0 < N_p(f) < +\infty, \quad 0 < N_q(g) < +\infty.$

Aplicamos la desigualdad de Young $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ con $a = \dfrac{f(x)}{N_p(f)}, \quad b = \dfrac{g(x)}{N_q(g)}$:

$$\frac{f(x)\,g(x)}{N_p(f)N_q(g)} \leq$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Supongamos $0 < N_p(f) < +\infty, \quad 0 < N_q(g) < +\infty.$

Aplicamos la desigualdad de Young $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ con $a = \dfrac{f(x)}{N_p(f)}, \quad b = \dfrac{g(x)}{N_q(g)}$:

$$\frac{f(x)\,g(x)}{N_p(f)N_q(g)} \leq \frac{1}{p}\,\frac{f^p(x)}{N_p^p(f)} + \frac{1}{q}\,\frac{g^q(x)}{N_q^q(g)} \qquad (x \in X).$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Supongamos $0 < N_p(f) < +\infty, \quad 0 < N_q(g) < +\infty.$

Aplicamos la desigualdad de Young $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ con $a = \dfrac{f(x)}{N_p(f)}, \quad b = \dfrac{g(x)}{N_q(g)}$:

$$\frac{f(x)\,g(x)}{N_p(f)N_q(g)} \leq \frac{1}{p}\,\frac{f^p(x)}{N_p^p(f)} + \frac{1}{q}\,\frac{g^q(x)}{N_q^q(g)} \qquad (x \in X).$$

Integramos sobre X respecto μ:

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Supongamos $0 < N_p(f) < +\infty, \quad 0 < N_q(g) < +\infty.$

Aplicamos la desigualdad de Young $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ con $a = \dfrac{f(x)}{N_p(f)}, \quad b = \dfrac{g(x)}{N_q(g)}$:

$$\frac{f(x)\,g(x)}{N_p(f)N_q(g)} \leq \frac{1}{p}\,\frac{f^p(x)}{N_p^p(f)} + \frac{1}{q}\,\frac{g^q(x)}{N_q^q(g)} \qquad (x \in X).$$

Integramos sobre X respecto μ:

$$\frac{1}{N_p(f)N_q(g)}\,N_1(f\,g)$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Supongamos $0 < N_p(f) < +\infty, \quad 0 < N_q(g) < +\infty.$

Aplicamos la desigualdad de Young $ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ con $a = \dfrac{f(x)}{N_p(f)}, \quad b = \dfrac{g(x)}{N_q(g)}$:

$$\frac{f(x)\,g(x)}{N_p(f)N_q(g)} \le \frac{1}{p}\,\frac{f^p(x)}{N_p^p(f)} + \frac{1}{q}\,\frac{g^q(x)}{N_q^q(g)} \qquad (x \in X).$$

Integramos sobre X respecto μ:

$$\frac{1}{N_p(f)N_q(g)}\,N_1(f\,g) \le$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Supongamos $0 < N_p(f) < +\infty, \quad 0 < N_q(g) < +\infty.$

Aplicamos la desigualdad de Young $ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ con $a = \dfrac{f(x)}{N_p(f)}, \quad b = \dfrac{g(x)}{N_q(g)}$:

$$\frac{f(x)\,g(x)}{N_p(f)N_q(g)} \le \frac{1}{p}\,\frac{f^p(x)}{N_p^p(f)} + \frac{1}{q}\,\frac{g^q(x)}{N_q^q(g)} \qquad (x \in X).$$

Integramos sobre X respecto μ:

$$\frac{1}{N_p(f)N_q(g)}\,N_1(f\,g) \le \frac{1}{p\,N_p^p(f)}\int_X f^p\,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{q\,N_q^q(g)}\int_X g^q\,\mathrm{d}\mu$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Supongamos $0 < N_p(f) < +\infty, \quad 0 < N_q(g) < +\infty.$

Aplicamos la desigualdad de Young $ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ con $a = \dfrac{f(x)}{N_p(f)}, \quad b = \dfrac{g(x)}{N_q(g)}$:

$$\frac{f(x)\,g(x)}{N_p(f)N_q(g)} \le \frac{1}{p}\,\frac{f^p(x)}{N_p^p(f)} + \frac{1}{q}\,\frac{g^q(x)}{N_q^q(g)} \qquad (x \in X).$$

Integramos sobre X respecto μ:

$$\frac{1}{N_p(f)N_q(g)}\,N_1(f\,g) \le \frac{1}{p\,N_p^p(f)}\int_X f^p\,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{q\,N_q^q(g)}\int_X g^q\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Supongamos $0 < N_p(f) < +\infty, \quad 0 < N_q(g) < +\infty.$

Aplicamos la desigualdad de Young $ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ con $a = \dfrac{f(x)}{N_p(f)}, \quad b = \dfrac{g(x)}{N_q(g)}$:

$$\frac{f(x)\,g(x)}{N_p(f)N_q(g)} \le \frac{1}{p}\,\frac{f^p(x)}{N_p^p(f)} + \frac{1}{q}\,\frac{g^q(x)}{N_q^q(g)} \qquad (x \in X).$$

Integramos sobre X respecto μ:

$$\frac{1}{N_p(f)N_q(g)}\,N_1(f\,g) \le \frac{1}{p\,N_p^p(f)}\int_X f^p\,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{q\,N_q^q(g)}\int_X g^q\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Notación útil

Ejercicio.

En la demostración del caso principal, es cómodo definir $u, v \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,

$$u(x) := \frac{1}{N_p(f)} f(x), \qquad v(x) := \frac{1}{N_q(g)} g(x).$$

Escribir la demostración usando esta notación.

En otras palabras, trabajar con las funciones u, v en vez de las funciones f, g.

Desigualdad de Hölder para funciones medibles complejas

Corolario

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$N_1(f\,g) \leq N_p(f) N_q(g).$$

Plan

1. Introducción
2. Desigualdad de Hölder
3. Criterio de igualdad en la desigualdad de Hölder
4. El teorema inverso de Hölder

Repaso: criterio de igualdad en la desigualdad de Young

Proposición

Sean $a, b \geq 0$, $p, q > 1$,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Entonces

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^p = b^q.$$

Repaso: criterio de igualdad en la desigualdad de Young

Proposición

Sean $a, b \geq 0$, $p, q > 1$,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Entonces

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^p = b^q.$$

Ejercicio: demostar esta proposición usando la convexidad estricta de la función exponencial.

Repaso: criterio para $h \geq 0 \quad \wedge \quad \int h = 0$

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tal que

$$\int_X h \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Entonces $h \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=} 0_X$.

Repaso: criterio para $h \geq 0 \quad \wedge \quad \int h = 0$

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tal que

$$\int_X h \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Entonces $h \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=} 0_X$.

Idea de demostración:

aplicar la desigualdad de Chebyshov–Márkov.

Repaso: criterio para $\varphi \leq \psi \quad \wedge \quad \int \varphi = \int \psi$

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sean $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ tales que

$$\varphi \leq \psi \qquad \wedge \qquad \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu = \int_X \psi \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Entonces $\varphi \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=} \psi$.

Repaso: criterio para $\varphi \leq \psi \quad \wedge \quad \int \varphi = \int \psi$

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sean $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ tales que

$$\varphi \leq \psi \qquad \wedge \qquad \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu = \int_X \psi \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Entonces $\varphi \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=} \psi$.

Demostración: aplicar la proposición anterior a la función $\psi - \varphi$.

Criterio de igualdad en la desigualdad de Hölder

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tales que $N_p(f) < +\infty$, $N_q(g) < +\infty$.

Entonces las siguientes dos afirmaciones son equivalentes.

(a) $N_1(f\,g) = N_p(f) N_q(g)$.

(b) $\exists \alpha, \beta \geq 0 \qquad (\alpha + \beta > 0) \quad \wedge \quad \Big(\alpha |f|^p \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=} \beta |g|^q\Big)$.

Criterio de igualdad en la desigualdad de Hölder

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tales que $N_p(f) < +\infty$, $N_q(g) < +\infty$.

Entonces las siguientes dos afirmaciones son equivalentes.

(a) $N_1(f\,g) = N_p(f) N_q(g)$.

(b) $\exists \alpha, \beta \geq 0 \qquad (\alpha + \beta > 0) \quad \wedge \quad \Big(\alpha |f|^p \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} \beta |g|^q\Big)$.

La condición (b) significa que las funciones $|f|^p$ y $|g|^q$ son linealmente dependientes, "despreciando un conjunto de medida cero".

(b)⇒(a)

Ejercicio. Suponer que

$$\exists \alpha, \beta \geq 0 \qquad (\alpha + \beta > 0) \quad \wedge \quad \left(\alpha |f|^p \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=} \beta |g|^q \right).$$

Demostrar que $N_1(f\, g) = N_p(f) N_q(g)$.

(a)⇒(b), casos triviales

Supongamos que

$$N_1(f\,g) = N_p(f)N_q(g) \qquad \wedge \qquad \Big(N_p(f) = 0 \quad \vee \quad N_q(g) = 0\Big).$$

Mostrar que

$$\exists \alpha, \beta \geq 0 \qquad (\alpha + \beta > 0) \quad \wedge \quad \Big(\alpha |f|^p \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=} \beta |g|^q\Big).$$

(a)⇒(b), caso principal, inicio

Supongamos que $N_1(f\,g) = N_p(f)N_q(g)$.

(a)⇒(b), caso principal, inicio

Supongamos que $N_1(f\,g) = N_p(f)N_q(g)$.

Definimos $u, v \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,

$$u(x) \coloneqq \frac{1}{N_p(f)}\,|f(x)|, \qquad v(x) \coloneqq \frac{1}{N_q(g)}\,|g(x)|.$$

(a)⇒(b), caso principal, inicio

Supongamos que $N_1(f\,g) = N_p(f)N_q(g)$.

Definimos $u, v \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,

$$u(x) \coloneqq \frac{1}{N_p(f)}\,|f(x)|, \qquad v(x) \coloneqq \frac{1}{N_q(g)}\,|g(x)|.$$

Ejercicio. Usando la condición $N_1(f\,g) = N_p(f)N_q(g)$ mostrar que

$$\int_X u\,v\,\mathrm{d}\mu = \int_X \left(\frac{1}{p}\,u^p + \frac{1}{q}\,v^q\right)\mathrm{d}\mu.$$

(a)⇒(b), caso principal, inicio

Supongamos que $N_1(f\,g) = N_p(f)N_q(g)$.

Definimos $u, v \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,

$$u(x) \coloneqq \frac{1}{N_p(f)}\,|f(x)|, \qquad v(x) \coloneqq \frac{1}{N_q(g)}\,|g(x)|.$$

Ejercicio. Usando la condición $N_1(f\,g) = N_p(f)N_q(g)$ mostrar que

$$\int_X u\,v\,\mathrm{d}\mu = \int_X \left(\frac{1}{p}\,u^p + \frac{1}{q}\,v^q\right)\mathrm{d}\mu.$$

Sugerencia: revisar la demostración de la desigualdad de Hölder.

(a)⇒(b), caso principal, final

Obtenemos que

$$\int_X u\, v \, \mathrm{d}\mu = \int_X \left(\frac{1}{p}\, u^p + \frac{1}{q}\, v^q \right) \mathrm{d}\mu.$$

(a)⇒(b), caso principal, final

Obtenemos que

$$\int_X u\, v \, \mathrm{d}\mu = \int_X \left(\frac{1}{p}\, u^p + \frac{1}{q}\, v^q \right) \mathrm{d}\mu.$$

Por otro lado, por la desigualdad de Young,

$$u\, v \leq \frac{1}{p}\, u^p + \frac{1}{q}\, v^q.$$

(a)⇒(b), caso principal, final

Obtenemos que

$$\int_X u\, v \, \mathrm{d}\mu = \int_X \left(\frac{1}{p}\, u^p + \frac{1}{q}\, v^q \right) \mathrm{d}\mu.$$

Por otro lado, por la desigualdad de Young,

$$u\, v \leq \frac{1}{p}\, u^p + \frac{1}{q}\, v^q.$$

Concluimos que existe $Y \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(X \setminus Y) = 0$ y

$$\forall x \in Y \qquad u(x)\, v(x) = \frac{1}{p}\, u(x)^p + \frac{1}{q}\, v(x)^q.$$

(a)⇒(b), caso principal, final

Obtenemos que

$$\int_X u\, v \, \mathrm{d}\mu = \int_X \left(\frac{1}{p}\, u^p + \frac{1}{q}\, v^q \right) \mathrm{d}\mu.$$

Por otro lado, por la desigualdad de Young,

$$u\, v \leq \frac{1}{p}\, u^p + \frac{1}{q}\, v^q.$$

Concluimos que existe $Y \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(X \setminus Y) = 0$ y

$$\forall x \in Y \qquad u(x)\, v(x) = \frac{1}{p}\, u(x)^p + \frac{1}{q}\, v(x)^q.$$

Ejercicio: usar el criterio de igualdad en la desigualdad de Young, completar la demostración.

Plan

1. Introducción
2. Desigualdad de Hölder
3. Criterio de igualdad en la desigualdad de Hölder
4. El teorema inverso de Hölder

El teorema inverso de Hölder

Teorema

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,
y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tal que $0 < N_p(f) < +\infty$.
Entonces existe g en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tal que

$$\int_X |g|^q \, \mathrm{d}\mu = 1 \qquad \wedge \qquad \int_X f\, g \, \mathrm{d}\mu = N_p(f).$$

El teorema inverso de Hölder

Teorema

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,
y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tal que $0 < N_p(f) < +\infty$.
Entonces existe g en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tal que

$$\int_X |g|^q \, \mathrm{d}\mu = 1 \qquad \wedge \qquad \int_X f\, g \, \mathrm{d}\mu = N_p(f).$$

Idea de demostración.

$$g(x) \coloneqq \begin{cases} N_p(f)^{-p/q} \, |f(x)|^{p-2} \, \overline{f(x)}, & \text{si } f(x) \neq 0; \\ 0, & \text{si } f(x) = 0. \end{cases}$$

Dualidad entre N_p y N_q

Corolario

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,
y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tal que $0 < N_p(f) < +\infty$.

Entonces

$$N_p(f) = \sup \left\{ \left| \int_X f\, g \, \mathrm{d}\mu \right| : \quad g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}), \quad N_q(g) \leq 1 \right\}.$$