Desigualdad de Hölder para sucesiones

Objetivos. Demostrar la desigualdad de Hölder para sucesiones.

Aplicaciones. Desigualdad de Minkowski para sucesiones, descripción del espacio dual de $\ell^p(\mathbb{N})$, acotamiento de varios operadores lineales definidos a través de sumas.

Prerrequisitos. Desigualdad de Young, sucesión, la suma de una serie.

1 Definición (exponentes conjugados)**.** Dos números $p, q > 1$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ se llaman *exponentes conjugados*. Tal vez otro nombre adecuado sería *exponentes complementarios*. Es fácil ver que la condición $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se puede escribir también en la siguiente forma equivalente:

$$(p-1)q = p. \tag{1}$$

2 Repaso (desigualdad de Young)**.** Sean $p, q > 1$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, y sean $a, b \geq 0$. Entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{2}$$

3 Repaso (el caso de igualdad en la desigualdad de Young)**.** Sean $p, q > 1$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, y sean $a, b \geq 0$. Supongamos que $ab = \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$. Entonces $a^p = b^q$.

4 Teorema (desigualdad de Hölder para sucesiones positivas)**.** *Sean* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$*,* $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *sucesiones con valores en* $[0, +\infty]$*. Entonces*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k^q\right)^{1/q}. \tag{3}$$

Demostración. Denotemos por α y β a los factores que están en el lado derecho de (3):

$$\alpha := \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^p\right)^{1/p}, \qquad \beta := \left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k^q\right)^{1/q}.$$

Si $\alpha = 0$, entonces $x_k = 0$ para cada k en $\mathbb{N}$, y la desigualdad (3) se convierte en la igualdad trivial $0 = 0$. De manera similar se considera el caso cuando $\beta = 0$. Si $\alpha > 0, \beta > 0$ y $\alpha = +\infty$ o $\beta = +\infty$, entonces el lado derecho de (3) es $+\infty$, y (3) se cumple de manera trivial.

Ahora consideremos el caso principal, cuando α y β son números finitos y estrictamente positivos: $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$. Denotemos por u, v a las sucesiones que se obtienen de x, y después de normalizarlas de la siguiente manera:

$$u_k := \frac{x_k}{\alpha}, \qquad v_k := \frac{y_k}{\beta} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k^p = \frac{1}{\alpha^p} \sum_{k=1}^{\infty} x_k^p = 1, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} v_k^p = \frac{1}{\beta^q} \sum_{k=1}^{\infty} y_k^q = 1.$$

Para todo k en $\mathbb{N}$ aplicamos la desigualdad de Young (2) a los números u_k y v_k:

$$u_k v_k \le \frac{u_k^p}{p} + \frac{v_k^q}{q},$$

luego sumamos ambos lados sobre k en $\mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Hemos demostrado que $\frac{1}{\alpha\beta} \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \le 1$, esto es, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \le \alpha\beta$. □

5 Corolario (desigualdad de Hölder para sucesiones complejas)**.** *Sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tales que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q < +\infty.$$

Entonces

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \, y_k \right| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{1/q}. \tag{4}$$

Demostración. Aplicando el Teorema 4 a las sucesiones $(|x_k|)_{k\in\mathbb{N}}$, $(|y_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ concluimos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k \, y_k| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{1/q}.$$

En particular, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ converge de manera absoluta y por lo tanto converge. Además,

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k|.$$

□

6 Lema. *Sea* $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in [0,+\infty)^{\mathbb{N}}$ *tal que* $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = 0$. *Entonces* $\alpha_k = 0$ *para cada* k.

7 Proposición (el caso de igualdad en la desigualdad de Hölder para sucesiones positivas, $1 < p < +\infty$)**.** *Sean* $p, q > 1$ *tales que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *y sean* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in [0,+\infty)^{\mathbb{N}}$ *tales que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^p < +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} y_k^q < +\infty.$$

Entonces las siguientes tres condiciones son equivalentes.

(a) Se cumple la igualdad

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k\, y_k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k^q\right)^{1/q}. \tag{5}$$

(b) Las sucesiones $(x_k^p)_{k\in\mathbb{N}}$, $(y_k^q)_{k\in\mathbb{N}}$ *son linealmente dependientes.*

(c) $x_k = 0$ *para cada* k *en* $\mathbb{N}$ *o existe* γ *en* $[0,+\infty)$ *tal que* $y_k^q = \gamma x_k^p$ *para cada* k *en* $\mathbb{N}$.

Demostración. Definimos α, β, u_k y v_k como en la demostración del Teorema 4. Notamos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha\beta}\left(\alpha\beta - \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right) &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{\infty} u_k^p + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{\infty} v_k^p - \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{u_k^p}{p} + \frac{v_k^q}{q} - u_k v_k\right).\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Young, en la última suma todos los sumandos son mayores o iguales a cero. Usando este cálculo, el Lema 6 y la Proposición 3 de igualdad en la desigualdad de Young, observamos las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k = \alpha\beta \qquad &\Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{u_k^p}{p} + \frac{v_k^q}{q} - u_k v_k\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \qquad \forall k \in \mathbb{N} \quad \frac{u_k^p}{p} + \frac{v_k^q}{q} = u_k v_k \\ &\Longleftrightarrow \qquad \forall k \in \mathbb{N} \quad u_k^p = v_k^q \\ &\Longleftrightarrow \qquad \forall k \in \mathbb{N} \quad y_k^q = \frac{\beta}{\alpha} x_k^p.\end{aligned}$$

Al recordar el caso excluido $x = 0_{\mathbb{N}}$, vemos que (a), (b) y (c) son equivalentes. □

El siguiente teorema se llama a veces "el teorema inverso de Hölder".

8 Teorema (el teorema inverso de Hölder para sucesiones)**.** *Sean* $p, q > 1$ *tales que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *y sea* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *tal que* $0 < \alpha < +\infty$, *donde* $\alpha := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}$. *Entonces existe una sucesión* $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *tal que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q = 1 \qquad y \qquad \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k = \alpha. \tag{6}$$

Demostración. Para todo k en $\mathbb{N}$ definimos y_k de la siguiente manera:

$$y_k := \begin{cases} \alpha^{-p/q}\, |x_k|^{p-2}\, \overline{x_k}, & \text{si } x_k \neq 0; \\ 0, & \text{si } x_k = 0. \end{cases}$$

Con ayuda de (1) obtenemos

$$|y_k|^q = \alpha^{-p} |x_k|^{q(p-1)} = \alpha^{-p} |x_k|^p, \qquad x_k y_k = \alpha^{-p/q} |x_k|^p.$$

Luego

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q = \alpha^{-p} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p = \alpha^{-p}\alpha^p = 1, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k = \alpha^{-p/q} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p = \alpha^{-\frac{p}{q}+p} = \alpha.$$

Hemos mostrado que se cumplen las propiedades (6). □

9 Observación. El Corolario 5 y el Teorema 8 juntos implican que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} = \sup\left\{ \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| : \quad (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q = 1 \right\}. \tag{7}$$

Después de definir los espacios $\ell^p(\mathbb{N})$, veremos que (7) describe la norma $\|\cdot\|_p$ en términos de la norma $\|\cdot\|_q$. Además, la identidad (7) hace un papel importante en la descripción del espacio dual del espacio $\ell^p(\mathbb{N})$.

El caso $p = 1$

10 Proposición (la desigualdad de Hölder para sucesiones en el caso $p = 1$)**.** *Sean* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *Entonces*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|\,|y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|\right)\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} |y_k|\right).$$

11 Ejercicio. Buscar análogos de la Proposición 7 y del Teorema 8 para $p = 1$.