

# Desigualdad de Hölder

**Objetivos.** Demostrar la desigualdad de Hölder usando la desigualdad de Young.

**Aplicaciones.** Desigualdad de Minkowski, acotamiento de varios operadores integrales.

**Prerrequisitos.** Funciones convexas, desigualdad de Young, la integral de Lebesgue, propiedad monótona de la integral de Lebesgue.

**1 Definición** (exponentes conjugados). Dos números  $p, q > 1$  tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  se llaman *exponentes conjugados*. Otro nombre adecuado sería *exponentes complementarios*. Es fácil ver que la condición  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  se puede escribir también en la siguiente forma equivalente:

$$(p - 1)q = p. \quad (1)$$

**2 Repaso** (desigualdad de Young). Sean  $p, q > 1$  tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , y sean  $a, b \geq 0$ . Entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (2)$$

**3 Teorema** (desigualdad de Hölder para funciones positivas). Sean  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida,  $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$  y  $p, q > 1$  tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Entonces

$$\int_X f g \, d\mu \leq \left( \int_X f^p \, d\mu \right)^{1/p} \left( \int_X g^q \, d\mu \right)^{1/q}. \quad (3)$$

*Demostración.* Denotemos por  $\alpha$  y  $\beta$  a los factores que están en el lado derecho de (4):

$$\alpha := \left( \int_X f^p \, d\mu \right)^{1/p}, \quad \beta := \left( \int_X g^q \, d\mu \right)^{1/q}.$$

Si  $\alpha = 0$ , entonces  $f = 0$  casi en todas partes, y la desigualdad (4) se convierte en la igualdad trivial  $0 = 0$ . De manera similar se considera el caso cuando  $\beta = 0$ . Si  $\alpha > 0, \beta > 0$  y  $\alpha = +\infty$  o  $\beta = +\infty$ , entonces el lado derecho de (4) es  $+\infty$ , y (4) se cumple de manera trivial.

Consideremos el caso principal cuando  $\alpha$  y  $\beta$  son números finitos y estrictamente positivos:  $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ . Denotemos por  $u$  y  $v$  a las funciones que se obtienen de  $f$  y  $g$  después de dividir las entre  $\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente:

$$u := \frac{f}{\alpha}, \quad v := \frac{g}{\beta}.$$

Entonces

$$\int_X u^p d\mu = \frac{1}{\alpha^p} \int_X f^p d\mu = 1, \quad \int_X v^q d\mu = \frac{1}{\beta^q} \int_X g^q d\mu = 1.$$

Para todo  $x$  en  $X$  aplicamos la desigualdad de Young (2) a los números  $u(x)$  y  $v(x)$ :

$$u(x)v(x) \leq \frac{u(x)^p}{p} + \frac{v(x)^q}{q},$$

luego integramos ambos lados de esta desigualdad sobre  $X$  respecto a la medida  $\mu$ :

$$\int_X uv d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Hemos demostrado que  $\frac{1}{\alpha\beta} \int_X uv d\mu \leq 1$ , esto es,  $\int_X fg d\mu \leq \alpha\beta$ . □

**4 Teorema** (desigualdad de Hölder para funciones reales o complejas). Sean  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida,  $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$  y  $p, q > 1$  tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Entonces

$$\int_X |f| |g| d\mu \leq \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left( \int_X |g|^q d\mu \right)^{1/q}. \quad (4)$$

*Demostración.* Aplicamos el Teorema 3 a las funciones  $|f|$  y  $|g|$  en vez de  $f$  y  $g$ , respectivamente. □

**5 Observación.** Para cada  $f$  en  $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$  y para cada  $p$  en  $[1, +\infty)$ , pongamos

$$N_p(f) := \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

De la misma manera se define  $N_p(f)$  para  $f$  en  $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ ; en este caso el valor absoluto dentro de la integral se puede omitir. Se recomienda escribir todos los resultados de esta sección usando la notación  $N_p(f)$  y  $N_q(g)$ . Luego veremos que  $N_p$  tiene propiedades de seminorma. En la demostración del teorema de Hölder, cuando dividimos  $f$  entre  $N_p(f)$ , estamos “normalizando” la función. Esta técnica se usa en varias otras situaciones.

**6 Observación** (la desigualdad de Hölder para los casos  $p = 1$  y  $p = \infty$ ). Luego vamos a definir el supremo esencial de una función medible no negativa (definida en un espacio de medida) y mostrar que la desigualdad de Hölder tiene sentido para  $p = 1$  y  $q = +\infty$ , o bien para  $p = +\infty$  y  $q = 1$ .

**7 Ejercicio.** Sean  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida,  $p, q > 0$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Determine qué condición sobre las funciones  $f$  y  $g$  es necesaria y suficiente para que la desigualdad de Hölder se convierta en una igualdad.

El siguiente teorema se llama a veces “el teorema inverso de Hölder”.

**8 Teorema.** Sean  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida,  $p, q > 1$  tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , y sea  $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$  tal que  $0 < \alpha < +\infty$ , donde  $\alpha := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$ . Entonces existe una función  $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$  tal que

$$\int_X |g|^q d\mu = 1 \quad y \quad \int_X fg d\mu = \alpha. \quad (5)$$

*Idea de demostración.* Para todo punto  $x \in X$  definimos  $g(x)$  de la siguiente manera:

$$g(x) := \begin{cases} \alpha^{-p/q} |f(x)|^{p-2} \overline{f(x)}, & \text{si } f(x) \neq 0; \\ 0, & \text{si } f(x) = 0. \end{cases}$$

Se puede verificar que  $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ . Con ayuda de (1) se prueba fácilmente que se cumplen las propiedades (5).  $\square$

**9 Observación.** Los Teoremas 4 y 8 juntos implican que

$$\left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} = \sup \left\{ \left| \int_X fg d\mu \right| : g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}), \int_X |g|^q d\mu = 1 \right\}. \quad (6)$$

Después de definir los espacios  $L^p(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ , veremos que (6) describe la norma  $\|\cdot\|_p$  en términos de la norma  $\|\cdot\|_q$ . Además la identidad (6) (o los Teoremas 4 y 8 juntos) hace un papel importante en la descripción del espacio dual del espacio  $L^p(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ .