Espacios de Hilbert: definición y ejemplos

Objetivos. Estudiar la definición del espacio de Hilbert. Conocer algunos ejemplos.

Prerrequisitos. Espacios con producto interno, espacios de Banach, espacios $\ell^2(\mathbb{N})$ y $L^2(X, \mu)$.

1 Definición. Sea H un espacio con producto interno. Se dice que H es un *espacio de Hilbert*, si H es completo.

2 Observación. Algunos autores incluyen en la definición las condiciones que H no es de dimensión finita y que H es separable. Nosotros no incluimos estas condiciones en la definición de espacio de Hilbert. En otras palabras, según nuestra terminología, H puede ser de dimensión finita o infinita, separable o no separable.

Ejemplos de espacios de Hilbert

3 Ejemplo. Sea $n \in \mathbb{N}$. El espacio $\mathbb{C}^n$ se considera con el producto interno

$$\langle a, b \rangle := \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{b_k}.$$

Es un espacio de Hilbert.

4 Ejemplo. $\ell^2(\mathbb{N})$ se considera con el producto interno

$$\langle a, b \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k}.$$

Es un espacio de Hilbert.

5 Ejemplo. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. El espacio $L^2(X, \mu)$ se considera con el producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_X f \, \overline{g} \, \mathrm{d}\mu.$$

Es un espacio de Hilbert.

6 Ejemplo (el espacio de Bergman sobre un subconjunto abierto del plano complejo)**.** Sea X un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Denotamos por μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{C}$. Denotamos por $H(X)$ al conjunto de todas las funciones holomorfas $X \to \mathbb{C}$.

$$\mathcal{A}^2(X) \coloneqq \left\{ f \in H(X)\colon \quad \int_X |f|^2 \, \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

Entonces se puede demostrar que $\mathcal{A}^2(X)$ es un espacio de Hilbert.