

Teorema de Hahn–Banach

1 Lema. Sean V un espacio vectorial real normado, W un subespacio vectorial de V , $f \in \mathcal{B}(W, \mathbb{R})$. Sea $u \in V \setminus W$. Entonces existe $g \in \mathcal{B}(W + \mathbb{R}u, \mathbb{R})$ tal que $g|_W = f$ y $\|g\| = \|f\|$.

Consideraciones previas. Notemos que cada elemento de $W + \mathbb{R}u$ se representa de manera única en la forma $y = x + \alpha u$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Denotemos $\|f\|$ por C . Entonces para cada x en W tenemos que

$$f(x) \leq C\|x\|.$$

El funcional g debe ser de la forma

$$g(x + \alpha u) = f(x) + \alpha\gamma.$$

El número γ debe satisfacer

$$f(x) + \gamma \leq C\|x + u\|, \quad f(y) - \gamma \leq C\|y - u\|,$$

en otras palabras,

$$f(y) - C\|y - u\| \leq \gamma \leq C\|x + u\| - f(x). \quad \square$$

Demostración. Notemos que para cualesquiera x, y en W

$$f(x + y) = f(x + u + y - u) \leq C(\|x + u\| + \|y - u\|),$$

por lo cual

$$f(y) - C\|y - u\| \leq C\|x + u\| - f(x).$$

Pongamos

$$\gamma = \inf_{x \in W} (\|x + u\| - f(x)).$$

Definimos $g: W + \mathbb{R}u \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la siguiente regla:

$$g(x + \alpha u) := f(x) + \alpha\gamma.$$

Entonces para $\alpha > 0$ tenemos

$$g(x + \alpha u) = \alpha \left(f\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \gamma \right) \leq C\alpha \left\| \frac{x}{\alpha} + u \right\| = C\|x + \alpha u\|,$$

y

$$g(x - \alpha u) = \alpha \left(f\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \gamma \right) \leq C\alpha \left\| \frac{x}{\alpha} - u \right\| = C\|x - \alpha u\|.$$

Hemos demostrado que $g(y) \leq C\|y\|$ para cada y en $W + \mathbb{R}u$. Luego

$$-g(y) = g(-y) \leq C\|-y\| = C\|y\|,$$

así que $|g(y)| \leq C\|y\|$. □

2 Lema. Sean V un espacio normado real y $C \geq 0$. Denotemos por \mathcal{A} al conjunto de los pares ordenados de la forma (S, g) , donde S es un subespacio de V , g es un funcional lineal acotado en S y $\|g\| \leq C$. La siguiente relación binaria es un orden parcial en \mathcal{A} :

$$(S_1, g_1) \preceq (S_2, g_2) \iff S_1 \subseteq S_2 \quad \wedge \quad g_2|_{S_1} = g_1.$$

Sea \mathcal{C} una cadena en (\mathcal{A}, \preceq) . Pongamos

$$U := \bigcup_{(W, g) \in \mathcal{C}} W, \quad h(x) := g(x) \quad (x \in W, (W, g) \in \mathcal{C}).$$

Entonces la definición de h es consistente, $(U, h) \in \mathcal{A}$ y (U, h) es una cota superior de \mathcal{C} .

3 Teorema. Sean V un espacio vectorial real normado, W un subespacio vectorial de V , $f \in \mathcal{B}(W, \mathbb{R})$. Entonces existe $F \in \mathcal{B}(V, \mathbb{R})$ tal que $\|F\| \leq \|f\|$ y $F|_W = f$.

Demostración para el caso de espacio real separable. Demostración para el caso cuando V es separable. Sea $D = \{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ un conjunto numerable y denso en V . Pongamos

$$S_j = \ell_{\mathbb{R}}(W \cup \{x_1, \dots, x_j\}) = W + \left(\bigoplus_{k=1}^j \mathbb{R}x_k \right).$$

Notamos que $S_{j+1} = S_j + \mathbb{R}x_{j+1}$. En particular, si $x_{j+1} \in S_j$, entonces $S_{j+1} = S_j$. Usando la inducción matemática y aplicando en cada paso el Lema 1, para cada j construimos $g_j \in \mathcal{B}(S_j, \mathbb{R})$ tal que $g_0 = f$, $g_{j+1}|_{S_j} = g_j$, y $\|g_j\| \leq \|f\|$. Pongamos $C = \|f\|$ y definamos (\mathcal{A}, \preceq) como en el Lema 2. Notemos que $\{(S_j, g_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una cadena en \mathcal{A} . Pongamos

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$$

y definimos $g \in \mathcal{B}(U, \mathbb{R})$ como en el Lema 2. Finalmente notamos que U es denso en V , y extendemos g por continuidad a un funcional $F \in \mathcal{B}(V, \mathbb{R})$. \square

Demostración para el caso general. Pongamos $C = \|f\|$ y definimos (\mathcal{A}, \preceq) como en el Lema 2. Denotemos por \mathcal{A}_0 al conjunto de los pares (S, g) tales que $(S, g) \in \mathcal{A}$ y $W \subseteq S$. Cualquier cadena en \mathcal{A}_0 es una cadena en \mathcal{A} y por el Lema 2 tiene una cota superior. Por el Lema de Kuratowski–Zorn, en \mathcal{A}_0 existe un elemento máximo, digamos (M, F) . Si $M \neq V$, entonces elegimos $x \in V \setminus M$, aplicamos el Lema 1 al subespacio M , vector x y funcional F , y construimos un par estrictamente más grande que (M, F) , lo cual contradice a la suposición que (M, F) es maximal. Luego $M = V$, y el funcional F es tiene propiedades requeridas. \square

4 Teorema (teorema de Hahn–Banach para espacios normados complejos). *Sean V un espacio vectorial complejo normado, W un subespacio vectorial de V , $f \in \mathcal{B}(W, \mathbb{C})$. Entonces existe $F \in \mathcal{B}(V, \mathbb{C})$ tal que $\|F\| \leq \|f\|$ y $F_W = f$.*

Demostración. Definimos $u: W \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la regla

$$u(x) := \operatorname{Re}(f(x)).$$

Entonces $u \in \mathcal{B}(W, \mathbb{R})$ y $\|u\| \leq \|f\|$. Además, para cada z en \mathbb{C} tenemos

$$z = \operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Re}(iz),$$

luego

$$f(x) = \operatorname{Re}(f(x)) - i \operatorname{Re}(i f(x)) = u(x) - i u(ix).$$

Usando el teorema de Hahn–Banach para el caso real, extendemos u a un funcional $U \in \mathcal{B}(V, \mathbb{R})$ tal que $\|U\| \leq \|f\|$. Pongamos

$$F(x) := U(x) - iU(ix).$$

Entonces $F(\alpha x) = \alpha F(x)$ para cada α en \mathbb{R} , y además

$$F(ix) = U(ix) + iU(x) = iF(x),$$

así que F es \mathbb{C} -lineal. Finalmente, para cada x en V encontramos α en \mathbb{C} tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha F(x) \geq 0$, luego

$$|F(x)| = \alpha F(x) = F(\alpha x) = \operatorname{Re}(F(\alpha x)) = U(\alpha x) \leq \|f\| \|\alpha x\| = \|f\| \|x\|,$$

así que $\|F\| \leq \|f\|$. □

5 Corolario. *Sea V un espacio normado real o complejo no nulo, y sea $x \in V$. Entonces existe $f \in V^*$ tal que $\|f\| \leq 1$ y $f(x) = \|x\|$.*

6 Corolario (los funcionales distinguen los puntos). *Sea V un espacio normado real o complejo, y sean $x, y \in V$ tales que $x \neq y$. Entonces existe $f \in V^*$ tal que $f(x) \neq f(y)$.*

7 Ejercicio. Sea S un subespacio cerrado de V y sea $x \in V \setminus S$. Entonces existe $f \in V^*$ tal que $f(y) = 0$ para cada y en S , y $f(x) \neq 0$.

8 Ejercicio. Sea V un espacio normado y sean $v_1, \dots, v_n \in V$ vectores linealmente independientes. Entonces existen funcionales $f_1, \dots, f_n \in V^*$ tales que $f_j(v_k) = \delta_{j,k}$.