Teorema de Hahn–Banach, forma algebraica real

Objetivos. Demostrar el teorema de Hahn–Banach en su forma algebraica real.

Prerrequisitos. Funcionales lineales, sumas directas de subespacios, espacios normados, “un paso de Hahn–Banach”, el lema de Kuratowski–Zorn.

Vamos a usar el siguiente resultado que hemos demostrado antes.

1 Proposición (repaso: un paso de Hahn–Banach)**.** *Sean V un espacio vectorial real normado, W un subespacio vectorial de V, $f \in \mathcal{B}(W, \mathbb{R})$. Sea $u \in V \setminus W$. Entonces existe $g \in \mathcal{B}(W + \mathbb{R}u, \mathbb{R})$ tal que $g|_W = f$ y $\|g\| = \|f\|$.*

2 Lema. *Sean V un espacio normado real y $\eta \geq 0$. Denotemos por $\mathcal{A}$ al conjunto de los pares ordenados de la forma (S, g), donde S es un subespacio de V, $g \in \mathcal{B}(S, \mathbb{R})$ y $\|g\| \leq \eta$. La siguiente relación binaria es un orden parcial en $\mathcal{A}$:*

$$(S_1, g_1) \preceq (S_2, g_2) \quad \Longleftrightarrow \quad S_1 \subseteq S_2 \quad \wedge \quad g_2|_{S_1} = g_1.$$

Sea $\mathcal{C}$ una cadena en $(\mathcal{A}, \preceq)$. Pongamos

$$U \coloneqq \bigcup_{(W,g)\in\mathcal{C}} W.$$

En otras palabras,

$$U = \big\{x \in V\colon \quad \exists (W, g) \in \mathcal{C} \quad x \in W\big\}.$$

Definimos $h\colon U \to \mathbb{R}$ mediante la siguiente regla. Dado x en U, encontramos (W, g) en $\mathcal{C}$ tal que $x \in W$, y ponemos

$$h(x) \coloneqq g(x).$$

Entonces la definición de h es consistente, $(U, h) \in \mathcal{A}$ y (U, h) es una cota superior de $\mathcal{C}$.

Demostración. Mostremos que la definición de g es consistente. Supongamos que

$$(W_1, g_1), (W_2, g_2) \in \mathcal{C}, \qquad x \in W_1, \quad x \in W_2.$$

Como $\mathcal{C}$ es una cadena, debe cumplirse al menos una de las comparaciones: $(W_1, g_1) \preceq (W_2, g_2)$ o $(W_2, g_2) \preceq (W_1, g_1)$. Consideremos solamente el primer caso (el segundo es similar). Como $g_2|_{W_1} = g_1$, tenemos que $g_2(x) = g_1(x)$.

Mostremos que U es cerrado bajo la adición y g es aditiva. Sean $x_1, x_2 \in U$. Existen (W_1, g_1), (W_2, g_2) en $\mathbb{C}$ tales que $x_1 \in W_1$ y $x_2 \in W_2$. Como $\mathcal{C}$ es una cadena, debe cumplirse al menos una de las comparaciones: $(W_1, g_1) \preceq (W_2, g_2)$ o $(W_2, g_2) \preceq (W_1, g_1)$. Consideremos solamente el primer caso (el segundo es similar). Como W_2 es un subespacio y g_2 es lineal, obtenemos $x_1 + x_2 \in U$

$$h(x_1 + x_2) = g_2(x_1 + x_2) = g_2(x_1) + g_2(x_2) = h(x_1) + h(x_2).$$

También es fácil de ver que $0_V \in U$, que U es cerrado bajo la multiplicación por escalares y que la función h es homogénea.

Dado x en U, encontramos (S, g) en $\mathcal{C}$ tal que $x \in W$, y obtenemos que

$$|h(x)| = |g(x)| \leq \|g\| \, \|x\| \leq \eta \, \|x\|.$$

Por lo tanto, $h \in \mathcal{B}(U, \mathbb{R})$ y $\|h\| \leq \eta$.

Finalmente, si $(S, g) \in \mathcal{C}$, entonces de la definición de U se sigue que $S \subseteq U$, y de la definición de h se sigue que $h(x) = g(x)$ para cada x en S. Por lo tanto, $(S, g) \preceq (U, h)$. $\square$

3 Teorema. *Sean V un espacio vectorial real normado, W un subespacio vectorial de V, $f \in \mathcal{B}(W, \mathbb{R})$. Entonces existe $F \in \mathcal{B}(V, \mathbb{R})$ tal que $\|F\| \leq \|f\|$ y $F|_W = f$.*

Demostración. Pongamos $\eta \coloneqq \|f\|$ y definimos $(\mathcal{A}, \preceq)$ como en el Lema 2. Denotemos por $\mathcal{A}_0$ al conjunto de los pares (S, g) tales que $(S, g) \in \mathcal{A}$ y $(W, f) \preceq (S, g)$. Cualquier cadena en $\mathcal{A}_0$ es una cadena en $\mathcal{A}$ y por el Lema 2 tiene una cota superior. Por el Lema de Kuratowski–Zorn, en $\mathcal{A}_0$ existe un elemento máximal, digamos (M, F). Si $M \neq V$, entonces elegimos $x \in V \setminus M$, aplicamos la Proposición 1 al subespacio M, vector x y funcional F, y construimos un par estrictamente más grande que (M, F), lo cual constradice a la suposición que (M, F) es maximal. Luego $M = V$, y el funcional F tiene las propiedades requeridas. $\square$

4 Observación. Para entender mejor el teorema y el papel que hace "un paso de Hahn–Banach", veremos una demostración para el caso cuando V es separable. En este caso, no es necesario usar la inducción transfinita.

Sea $D = \{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ un conjunto numerable y denso en V. Pongamos $\eta \coloneqq \|f\|$,

$$S_j = \ell_{\mathbb{R}}(W \cup \{x_1, \ldots, x_j\}) = W + \left(\sum_{k=1}^{j} \mathbb{R} x_j \right).$$

Además, pongamos $S_0 \coloneqq W$ y $g_0 \coloneqq f$. Notamos que $S_j = S_{j-1} + \mathbb{R} x_j$. Usamos la inducción matemática sobre j para definir $g_j \colon S_j \to \mathbb{R}$. Si $x_j \notin S_{j-1}$, entonces aplicamos la Proposición 1. Si $x_j \in S_{j-1}$, entonces $S_j = S_{j-1}$ y ponemos $g_j \coloneqq g_{j-1}$. En ambos casos, $g_j \in \mathcal{B}(S_j, \mathbb{R})$, $g_j|_{S_{j-1}} = g_j$, y $\|g_j\| \le \eta$. Definamos $(\mathcal{A}, \preceq)$ como en el Lema 2. Notemos que $\{(S_j, g_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una cadena en $\mathcal{A}$. Pongamos

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$$

y definimos $g \in \mathcal{B}(U, \mathbb{R})$ como en el Lema 2. Finalmente notamos que U es denso en V y g es una función uniformemente continua. Extendemos g por continuidad a un funcional $F \in \mathcal{B}(V, \mathbb{R})$.