# Matriz de Gram

**Objetivos.** Definir la *matriz de Gram* de una lista de vectores en un espacio con producto interno. Conocer sus propiedades básicas.

**Prerrequisitos.** Espacios con producto interno, listas ortogonales y ortonormales de vectores, bases ortonormales, matriz adjunta.

En este tema estamos suponiendo que $H$ es un espacio vectorial complejo con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Estamos suponiendo que el producto interno es lineal respecto al primer argumento.

**1 Definición** (la matriz de Gram de una lista de vectores en un espacio con producto interno)**.** Sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ una lista de vectores en $V$. La *matriz de Gram* de la lista $\mathcal{A}$ se define mediante la siguiente regla:

$$G(\mathcal{A}) \coloneqq \big[\langle a_q, a_p\rangle\big]_{p,q=1}^{m}.$$

**2 Observación.** Si escribimos el producto interno como $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ y usamos el convenio que el producto interno es lineal respecto al segundo argumento, entonces

$$G(\mathcal{A}) \coloneqq \big[\langle a_p | a_q\rangle\big]_{p,q=1}^{m}.$$

**3 Ejercicio.** Mostrar que $G(\mathcal{A})$ es hermitiana.

**4 Ejercicio.** Mostrar que $\mathcal{A}$ es ortogonal $\Longleftrightarrow$ $G(\mathcal{A})$ es diagonal.

**5 Ejercicio.** Mostrar que $\mathcal{A}$ es ortonormal $\Longleftrightarrow$ $G(\mathcal{A}) = I_m$.

**6 Ejercicio.** En este ejercicio consideramos el caso particular cuando $H = \mathbb{C}^n$. Sea $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$. Denotemos por $a_1, \ldots, a_m$ a las columnas de $A$. Sea $\mathcal{A} \coloneqq (a_1, \ldots, a_m)$. Demostrar que

$$G(\mathcal{A}) = A^* A.$$

En las siguientes proposiciones consideramos el producto interno en $H$ y el producto interno canónico (producto punto) en $\mathbb{C}^m$, por eso usamos la notación $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}^m}$.

**7 Proposición.** *Sea $H$ un espacio con producto interno y $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_m) \in H^m$. Además, sean $\xi \in \mathbb{C}^m$ y*

$$v \coloneqq \sum_{j=1}^{m} \xi_j a_j.$$

*Entonces, para cada $k$ en $\{1, \ldots, m\}$, el producto interno $\langle v, a_k \rangle_H$ es el $k$-ésimo componente del vector $G(\mathcal{A})\xi$:*

$$\langle v, a_k \rangle_H = (G(\mathcal{A})\xi)_k.$$

*En otras palabras, el vector formado por todos estos productos internos coincide con el producto $G(\mathcal{A})\xi$:*

$$\big[\langle v, a_k \rangle_H\big]_{k=1}^{m} = G(\mathcal{A})\xi.$$

*Demostración.* En efecto, para cada $k$ en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle v, a_k \rangle_H = \left\langle \sum_{j=1}^{m} \xi_j a_j, a_k \right\rangle_H = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \langle a_j, a_k \rangle_H = \sum_{j=1}^{m} G(\mathcal{A})_{k,j} \xi_j = (G(\mathcal{A})\xi)_k. \qquad \square$$

**8 Proposición.** *Sea $H$ un espacio con producto interno y $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_m) \in H^m$. Además, sean $\xi \in \mathbb{C}^m$, $\eta \in \mathbb{C}^m$,*

$$v \coloneqq \sum_{j=1}^{m} \xi_j a_j, \qquad w \coloneqq \sum_{k=1}^{m} \eta_k a_k.$$

*Entonces,*

$$\langle v, w \rangle_H = \langle G(\mathcal{A})\xi, \eta \rangle_{\mathbb{C}^m}.$$

*Primera demostración.*

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle_H &= \left\langle \sum_{j=1}^{m} \xi_j a_j, \sum_{k=1}^{m} \eta_k a_k \right\rangle_H = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \xi_j \overline{\eta_k} \langle a_j, a_k \rangle_H = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \xi_j \overline{\eta_k} G(\mathcal{A})_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left( \sum_{j=1}^{m} G(\mathcal{A})_{k,j} \xi_j \right) \overline{\eta_k} = \sum_{k=1}^{m} \big(G(\mathcal{A})\xi\big)_k \overline{\eta_k} = \langle G(\mathcal{A})\xi, \eta \rangle_{\mathbb{C}^m}. \qquad \square \end{aligned}$$

*Segunda demostración.* Con ayuda de la Proposición 7, escribimos la demostración de manera más breve:

$$\langle v, w \rangle_H = \left\langle v, \sum_{k=1}^{m} \eta_k a_k \right\rangle_H = \sum_{k=1}^{m} \overline{\eta_k} \langle v, a_k \rangle_H = \sum_{k=1}^{m} (G(\mathcal{A})\xi)_k \overline{\eta_k} = \langle G(\mathcal{A})\xi, \eta \rangle_{\mathbb{C}^n}. \qquad \square$$

**9 Corolario.** *Sea* $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ *una lista de vectores en* $H$ *y sea* $\xi \in \mathbb{C}^m$*. Entonces,*

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \xi_j a_j \right\|_H^2 = \langle G(\mathcal{A})\xi, \xi \rangle_{\mathbb{C}^m}.$$

*Demostración.* Aplicamos la proposición anterior con $\eta = \xi$. □

**10 Proposición.** *Sea* $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ *una lista de vectores en* $H$*. Entonces,* $G(\mathcal{A}) \geq 0$*.*

*Demostración.* Se sigue del Corolario 9. En efecto, para cada vector $\xi$ en $\mathbb{C}^m$,

$$\langle G(\mathcal{A})\xi, \xi \rangle_{\mathbb{C}^m} = \left\| \sum_{j=1}^{m} \xi_j a_j \right\|_H^2 \geq 0.$$ □

**11 Proposición.** *Sea* $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ *una lista de vectores en* $H$*. Entonces,* $G(\mathcal{A}) > 0$ *si, y solo si,* $\mathcal{A}$ *es linealmente independiente.*

*Demostración.* Se sigue del Corolario 9. Mostremos solamente $\Rightarrow$. Suponemos que $G(\mathcal{A}) > 0$. Esto significa que

$$\forall \xi \in \mathbb{C}^m \setminus \{0_m\} \qquad \langle G(\mathcal{A})\xi, \xi \rangle_{\mathbb{C}^m} > 0.$$

Reescribimos el último producto interno usando el Corolario 9:

$$\forall \xi \in \mathbb{C}^m \setminus \{0_m\} \qquad \left\| \sum_{j=1}^{m} \xi_j a_j \right\|_H^2 > 0.$$

Sabemos que el producto interno es estrictamente positivo si el vector es distinto de cero. Luego,

$$\forall \xi \in \mathbb{C}^m \setminus \{0_m\} \qquad \sum_{j=1}^{m} \xi_j a_j \neq 0_H.$$

Esta condición significa que $a_1, \ldots, a_m$ son linealmente independientes. □

**12 Problema.** Sea $H = \mathbb{C}^n$ y sea $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$. Denotemos por $a_1, \ldots, a_m$ a las columnas de $A$. Sea $\mathcal{A} \coloneqq (a_1, \ldots, a_m)$. Demuestre que el rango de $G(\mathcal{A})$ es el mismo que el rango de $A$. Se recomienda usar la ortogonalización de Gram–Schmidt.