Transformada de Gelfand
para álgebras C* conmutativas con identidad

1 Proposición (el espectro y el radio espectral de funciones continuas sobre un compacto, repaso)**.** *Sea K un compacto de Hausdorff y sea $f \in C(K)$. Entonces*

$$\operatorname{Sp}(f) = f[K], \qquad r(f) = \|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Demostración. 1. Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus f[K]$. Definimos $g\colon K \to \mathbb{C}$ mediante la regla $g(x) \coloneqq \frac{1}{\lambda - f(x)}$. Entonces g es continua y $(\lambda 1_K - f)g = 1_K$.

2. Supongamos que $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}(f)$. Entonces existe g en $C(K)$ tal que $(\lambda 1_K - f)g = 1_K$. Luego para cada x en K obtenemos $(\lambda - f(x))g(x) = 1$, por eso $f(x) \neq \lambda$.

3. Los incisos 1 y 2 muestran que $\operatorname{Sp}(f) = f[K]$. Luego

$$r(f) = \sup_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} |\lambda| = \sup_{x \in K} |f(x)| = \|f\|. \qquad \square$$

2 Proposición (caracterización de varias subclases de elementos normales en el álgebra de funciones continuas sobre un compacto)**.** *Sea K un compacto de Hausdorff y sea $f \in C(K)$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

1. *f es autoadjunto $\iff f[X] \subseteq \mathbb{R}$.*

2. *f es unitario $\iff f[X] \subseteq \mathbb{T}$.*

3. *f es positivo $\iff f[X] \subseteq [0, +\infty)$.*

4. *f es proyección $\iff f[X] \subseteq \{0, 1\}$.*

Idea de demostración. 1. La condición que f es un elemento autoadjunto de $C(K)$ significa que $\overline{f(x)} = f(x)$ para cada x en K, pero esto quiere decir que $f(x) \in \mathbb{R}$ para cada x en K.

3. Supongamos que $f(x) \geq 0$ para cada x en K. Definimos $g\colon X \to \mathbb{C}$ como $g(x) \coloneqq \sqrt{f(x)}$. Entonces $f = g^* g$, por eso f es un elemento positivo de $C(K)$. $\square$

3 Proposición (teorema de Stone–Weierstrass, repaso sin demostración). *Sea K un espacio topológico compacto de Hausdorff y sea $\mathcal{S}$ un subconjunto de $C(K)$ con las siguientes propiedades:*

- *$\mathcal{S}$ es una subálgebra de $C(K)$, esto es, el conjunto $\mathcal{S}$ contiene 0_K, es cerrado bajo las operaciones lineales y bajo la multiplicación;*
- *el $\mathcal{S}$ es cerrado bajo la conjugación: si $f \in \mathcal{S}$, entonces $\overline{f} \in \mathcal{S}$;*
- *$1_K \in \mathcal{S}$;*
- *$\mathcal{S}$ separa los puntos de K, esto es, para cada x, y en K con $x \neq y$ existe f en $\mathcal{S}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.*

Entonces el conjunto $\mathcal{S}$ es denso en $C(K)$.

Hay otras formas equivalentes del teorema de Stone–Weierstrass. Por ejemplo, si además se pide que $\mathcal{S}$ sea un conjunto cerrado en $C(K)$, entonces se puede concluir que $\mathcal{S} = C(K)$.

4 Ejercicio. Recuerde la aplicación del teorema de Stone–Weierstrass a los polinomios (algebraicos) en un segmento de la recta real.

5 Ejercicio. Recuerde la aplicación del teorema de Stone–Weierstrass a los polinomios trigonométricos.

6 Teorema. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C* conmutativa con identidad. Pongamos $K := \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Entonces la transformada de Gelfand $\Gamma\colon \mathcal{A} \to C(K)$ es un C*-isomorfismo. En particular, Γ es isométrico y suprayectivo.*

Demostración. 1. Mostremos que Γ es un C*-morfismo. Ya sabemos que para cualquier álgebra de Banach conmutativa con identidad la función Γ es un morfismo de álgebras complejas con identidad. Nos falta mostrar que para cada a en $\mathcal{A}$ se cumple $\Gamma(a^*) = \Gamma(a)^*$. Sea $a \in \mathcal{A}$. Encontramos b, c en $\mathcal{A}$ tales que $a = b + \mathrm{i}\,c$, $b^* = b$ y $c^* = c$. Como b y c son autoadjuntos, $\mathrm{Sp}(b) \subseteq \mathbb{R}$ y $\mathrm{Sp}(c) \subseteq \mathbb{R}$. Recordamos que $\Gamma(b)[K] = \mathrm{Sp}(b)$, $\Gamma(c)[K] = \mathrm{Sp}(c)$, y concluimos que todos los valores de las funciones $\Gamma(b)$ y $\Gamma(c)$ son reales. Luego para cada φ en K tenemos

$$\begin{aligned}\Gamma(a^*)(\varphi) &= \Gamma(b - \mathrm{i}\,c)(\varphi) = \Gamma(b)(\varphi) - \mathrm{i}\,\Gamma(c)(\varphi)\\ &= \overline{\Gamma(b)(\varphi) + \mathrm{i}\,\Gamma(c)(\varphi)} = \overline{\Gamma(b + \mathrm{i}\,c)(\varphi)} = \overline{\Gamma(a)(\varphi)},\end{aligned}$$

esto es, $\Gamma(a^*) = \Gamma(a)^*$.

2. Como $\mathcal{A}$ es un álgebra C* y Γ es un C*-morfismo, el conjunto $\Gamma[\mathcal{A}]$ es una subálgebra de $C(K)$, cerrada bajo la conjugación. Además, $1_K = \Gamma(e) \in \Gamma[\mathcal{A}]$.

3. Mostremos que Γ es una isometría. En efecto, para cada a en $\mathcal{A}$

$$\|\Gamma(a)\|^2 = \|\Gamma(a)^*\Gamma(a)\| = \|\Gamma(a^*a)\| = r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2.$$

En particular, la función Γ es inyectiva.

4. Como el espacio métrico $\mathcal{A}$ es completo y Γ es una isometría, el espacio métrico $\Gamma[\mathcal{A}]$ es completo. Por consecuencia, el conjunto $\Gamma[\mathcal{A}]$ es cerrado en $C(K)$.

5. Mostremos que el conjunto $\Gamma[\mathcal{A}]$ separa los puntos de K. Sean $\varphi, \psi \in K$ tales que $\varphi \neq \psi$. Por la definición de la igualdad de funciones, existe f en $\mathcal{A}$ tal que $\varphi(f) \neq \psi(f)$. Lo último significa que $\Gamma(f)(\varphi) \neq \Gamma(f)(\psi)$.

6. Por el teorema de Stone–Weierstrass, $\Gamma[\mathcal{A}]$ coincide con $C(K)$. En otras palabras, la función Γ es suprayectiva. $\square$

7 Corolario. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C* conmutativa con identidad, y sea $a \in \mathcal{A}$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

- *a es autoadjunto $\Longleftrightarrow \operatorname{Sp}(a) \subseteq \mathbb{R}$;*
- *a es unitario $\Longleftrightarrow \operatorname{Sp}(a) \subseteq \mathbb{T}$;*
- *a es positivo $\Longleftrightarrow \operatorname{Sp}(a) \subseteq [0, +\infty)$.*
- *a es proyección $\Longleftrightarrow \operatorname{Sp}(a) \subseteq \{0, 1\}$.*

Notemos que en cada álgebra C* se define de manera natural el orden parcial: $a \leq b$ si, y solo si, $b - a$ es un elemento positivo. La transformada de Gelfand preserva este orden.

Transformada de Gelfand del espacio de funciones medibles esencialmente acotadas

8 Proposición. *Sea* (X, μ) *un espacio de medida. Pongamos* $K \coloneqq \mathcal{M}(L^\infty(X, \mu))$. *Entonces* K *es extremadamente disconexo, esto es, cada subconjunto abierto de* K *tiene cerradura abierta.*

Demostración. Sabemos que $\Gamma\colon L^\infty(X, \mu) \to C(K)$ es un C*-isomorfismo. Sea U un subconjunto abierto de K. Pongamos

$$\mathcal{F} \coloneqq \{f \in C(K, [0, 1])\colon\ \forall \varphi \in K \setminus U\ f(\varphi) = 0\}.$$

Denotemos por f al supremo del conjunto $\Gamma^{-1}[\mathcal{F}]$ en $L^\infty(X, \mu)$. Pongamos $g \coloneqq \Gamma(f)$. Entonces g es el supremo del conjunto $\mathcal{F}$ en $C(K)$. Es claro que $0 \le g \le 1$. Para cada φ en U, por el Lema de Uryson, existe una función h en $\mathcal{F}$ tal que $h(\varphi) = 1$. Por eso $g(\varphi) = 1$ para cada φ en U. Por continuidad de g, $g(\varphi) = 1$ para cada φ en $\mathrm{cl}(U)$.

Por otro lado, si $\psi \in K \setminus \mathrm{cl}(U)$, entonces por el lema de Uryson existe una función $h \in C(K, [0, 1])$ tal que $h(\varphi) = 1$ para cada φ en $\mathrm{cl}(U)$ y $h(\psi) = 0$. Luego h es una cota superior de $\mathcal{F}$ y $g \le h$. Esto implica que $g(\psi) = 0$ para cada ψ en $K \setminus \mathrm{cl}(U)$. Como g es continua, concluimos que el conjunto

$$\mathrm{cl}(U) = g^{-1}[[0, 1)]$$

es abierto. $\square$