La transformada de Gelfand

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa con identidad e.

Denotamos por $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ al conjunto de los caracteres de $\mathcal{A}$, con la topología inducida por la topología débil-$*$ del espacio dual $\mathcal{A}^*$. Ya sabemos que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es de Hausdorff y compacto.

Además, sabemos que hay una correspondencia biyectiva entre $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ y el conjunto de todos los ideales maximales (propios) de $\mathcal{A}$.

1 Proposición. *Sea $a \in \mathcal{A}$. Entonces la función $f\colon \mathcal{M}(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$, $f(\varphi) := \varphi(a)$, es continua.*

Demostración. En efecto, sea $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces

$$f^{-1}[f(\varphi) + \varepsilon\mathbb{D}] = \{\psi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\colon\ |\psi(a) - \varphi(a)| < \varepsilon\},$$

y el último conjunto es abierto en $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, por la definición de la topología débil-$*$. □

2 Definición. Definimos $\Gamma\colon \mathcal{A} \to C(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$,

$$\Gamma(a)(\varphi) := \varphi(a) \qquad (a \in \mathcal{A},\ \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})).$$

3 Proposición. *La función Γ es un homomorfismo continuo de álgebras de Banach con identidad. Más aún, $\|\Gamma(a)\| \le \|a\|$ para cada a en $\mathcal{A}$.*

4 Proposición (descripción de la invertibilidad en términos de caracteres)**.** *Sea $a \in \mathcal{A}$. Entonces $a \in \operatorname{Inv}(\mathcal{A})$ si, y solo si, $\Gamma(a) \in \operatorname{Inv}(C(\mathcal{M}(\mathcal{A})))$. En otras palabras, $a \in \operatorname{Inv}(\mathcal{A})$ si, y solo si, $\varphi(a) \neq 0$ para cada φ en $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.*

Demostración. La necesidad es obvia: si $ab = e$, entonces $\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(e)$.

Demostremos la suficiencia. Supongamos que a no es invertible en $\mathcal{A}$. Entonces el conjunto $a\mathcal{A}$ es un ideal propio de $\mathcal{A}$. Luego existe un ideal maximal propio J de $\mathcal{A}$ tal que $a\mathcal{A} \subseteq J$. Obtenemos que $a \in J$. Sea $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ tal que $\ker(\varphi) = J$. Entonces $\varphi(a) = 0$, y la función $\Gamma(a)$ no es elemento invertible de $C(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$. □

5 Corolario (descripción del espectro en términos de caracteres)**.** *Sea $a \in \mathcal{A}$. Entonces*

$$\operatorname{Sp}(a) = \operatorname{Sp}(\Gamma(a)) = \{\varphi(a)\colon\ \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}.$$

6 Corolario (descripción del radio espectral en términos de caracteres)**.** *Sea $a \in \mathcal{A}$. Entonces*

$$r(a) = \sup\{|\varphi(a)|\colon\ \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\} = \|\Gamma(a)\|. \tag{1}$$

¿Cuándo la transformada de Gelfand es isométrica?

7 Proposición. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa con identidad. Entonces la función $\Gamma\colon \mathcal{A} \to C(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$ es isométrica si, y solo si, para cada a en $\mathcal{A}$*

$$\|a^2\| = \|a\|^2.$$

Demostración. 1. Según la fórmula (1), Γ es isométrica si, y solo si, $r(a) = \|a\|$ para cada a en $\mathcal{A}$.

2. Supongamos que Γ es isométrica. Dado a en $\mathcal{A}$, apliquemos el inciso 1 de la demostración y un corolario del teorema del mapeo del espectro:

$$\|a^2\| = r(a^2) = r(a)^2 = \|a\|^2.$$

3. Supongamos que para cada a en $\mathcal{A}$ se cumple la igualdad $\|a^2\| = \|a\|^2$. Entonces por inducción matemática sobre n obtenemos

$$\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}.$$

Sabemos que $r(a) = \lim_{m\to\infty} \|a^m\|^{1/m}$. El límite existe, por eso el límite es igual al límite de cualquier sucesión. En particular,

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^{2^n}\|^{1/2^n} = \lim_{n\to\infty} \|a\| = \|a\|. \qquad \square$$