

Objetivos

Sabemos: si V es un espacio de Banach y $A: V \rightarrow V$ es un operador lineal acotado, entonces su espectro $\text{sp}(A)$ es compacto.

Objetivos

Sabemos: si V es un espacio de Banach y $A: V \rightarrow V$ es un operador lineal acotado, entonces su espectro $\text{sp}(A)$ es compacto.

Vamos a demostrar el teorema de Gelfand:

$$\text{sp}(A) \neq \emptyset.$$

1 Repaso de herramientas

2 Teorema que el espectro es no vacío

Plan

- 1 Repaso de herramientas
- 2 Teorema que el espectro es no vacío

Espectro de un operador lineal acotado (repaso)

Sea V un espacio de Banach, $V \neq \{0_V\}$.

$\mathcal{B}(V) :=$ el álgebra de los operadores lineales acotados $V \rightarrow V$.

$\text{Inv}(\mathcal{B}(V)) :=$ el grupo de los operadores invertibles.

Notemos que si $T \in \text{Inv}(\mathcal{B}(V))$, entonces $T \neq 0$.

Dado A en $\mathcal{B}(V)$,

$$\text{sp}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \notin \text{Inv}(\mathcal{B}(A))\}.$$

Sabemos que $\text{sp}(A)$ es cerrado y

$$\text{sp}(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|A\|\}.$$

La función resolvente, repaso

Dado A en $\mathcal{B}(V)$, definimos $R_A: \mathbb{C} \setminus \text{sp}(A) \rightarrow \mathbb{C}$,

$$R_A(\lambda) := (\lambda I - A)^{-1}.$$

Sabemos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|R_A(\lambda)\| = 0.$$

Sabemos que R_A es holomorfa, y su derivada es $-R_A^2$: si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \text{sp}(A)$, entonces

$$\lim_{\xi \rightarrow \lambda} \left(\frac{1}{\xi - \lambda} (R_A(\xi) - R_A(\lambda)) \right) = -R_A(\lambda)^2.$$

Corolario del teorema de Hahn–Banach, repaso

Dado un espacio vectorial normado E y un vector $a \in E$, existe $\varphi \in \mathcal{B}(E, \mathbb{C})$ tal que $\|\varphi\| \leq 1$ y $\varphi(a) = \|a\|$.

Funciones continuas que tienen un límite finito en el infinito

Proposición

Sea $g \in C(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ y sea $\xi \in \mathbb{C}$ tales que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \xi.$$

Entonces g es acotada.

Demostración: ejercicio.

Paso 1. Usando la hipótesis que $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \xi$, encontrar $R > 0$ tal que $|g(z)| \leq |\xi| + 1$ para $|z| > R$.

Paso 2. Usando la compacidad del disco cerrado $\text{clos}(R\mathbb{D})$, demostrar que g es acotada en $\text{clos}(R\mathbb{D})$.

Teorema de Liouville sobre funciones holomorfas enteras acotadas

Sea $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa acotada. Entonces g es una constante.

Teorema de Liouville sobre funciones holomorfas enteras acotadas

Sea $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa acotada. Entonces g es una constante.

Demostración. Como g es holomorfa, también es analítica:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Los coeficientes a_k se pueden encontrar por la fórmula integral de Cauchy:

$$a_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{g(z) dz}{z^{k+1}}.$$

Como g es acotada, $|a_k| \leq r \cdot \frac{\|g\|_{\sup}}{r^{k+1}}$. Aplicamos $\lim_{r \rightarrow +\infty}$ y obtenemos $a_k = 0$ para $k \geq 1$.

Plan

- 1 Repaso de herramientas
- 2 Teorema que el espectro es no vacío

Teorema

Sea V un espacio de Banach, $V \neq \{0_V\}$, $A \in \mathcal{B}(V)$. Entonces

$$\text{sp}(A) \neq \emptyset.$$

Teorema

Sea V un espacio de Banach, $V \neq \{0_V\}$, $A \in \mathcal{B}(V)$. Entonces

$$\text{sp}(A) \neq \emptyset.$$

El teorema fue demostrado por Izrail Moiséyevich Gelfand (1913–2009).

Teorema

Sea V un espacio de Banach, $V \neq \{0_V\}$, $A \in \mathcal{B}(V)$. Entonces

$$\text{sp}(A) \neq \emptyset.$$

El teorema fue demostrado por Izrail Moiséyevich Gelfand (1913–2009).

La demostración es por reducción al absurdo.

Teorema

Sea V un espacio de Banach, $V \neq \{0_V\}$, $A \in \mathcal{B}(V)$. Entonces

$$\text{sp}(A) \neq \emptyset.$$

El teorema fue demostrado por Izrail Moiséyevich Gelfand (1913–2009).

La demostración es por reducción al absurdo.

Suponemos que $\text{sp}(A) = \emptyset$. Vamos a llegar a una contradicción.

Teorema

Sea V un espacio de Banach, $V \neq \{0_V\}$, $A \in \mathcal{B}(V)$. Entonces

$$\text{sp}(A) \neq \emptyset.$$

El teorema fue demostrado por Izrail Moiséyevich Gelfand (1913–2009).

La demostración es por reducción al absurdo.

Suponemos que $\text{sp}(A) = \emptyset$. Vamos a llegar a una contradicción.

Idea: aplicar el teorema de Liouville a la función $\varphi \circ R_A$, donde $\varphi \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(V), \mathbb{C})$.

Demostración

Supongamos que $\text{sp}(A) = \emptyset$. Entonces el dominio de R_A es \mathbb{C} .

Demostración

Supongamos que $\text{sp}(A) = \emptyset$. Entonces el dominio de R_A es \mathbb{C} .

Notamos que $R_A(0) \neq 0$.

Demostración

Supongamos que $\text{sp}(A) = \emptyset$. Entonces el dominio de R_A es \mathbb{C} .

Notamos que $R_A(0) \neq 0$. Por Hahn–Banach, encontramos $\varphi \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(V), \mathbb{C})$ tal que

$$\varphi(R_A(0)) \neq 0.$$

Demostración

Supongamos que $\text{sp}(A) = \emptyset$. Entonces el dominio de R_A es \mathbb{C} .

Notamos que $R_A(0) \neq 0$. Por Hahn–Banach, encontramos $\varphi \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(V), \mathbb{C})$ tal que

$$\varphi(R_A(0)) \neq 0.$$

Pongamos $g := \varphi \circ R_A$. Entonces g es holomorfa en \mathbb{C} :

$$\lim_{\xi \rightarrow \lambda} \frac{g(\xi) - g(\lambda)}{\xi - \lambda} = \lim_{\xi \rightarrow \lambda} g \left(\frac{1}{\xi - \lambda} (R_A(\xi) - R_A(\lambda)) \right) = -g(R_A(\lambda)^2).$$

Demostración

Supongamos que $\text{sp}(A) = \emptyset$. Entonces el dominio de R_A es \mathbb{C} .

Notamos que $R_A(0) \neq 0$. Por Hahn–Banach, encontramos $\varphi \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(V), \mathbb{C})$ tal que

$$\varphi(R_A(0)) \neq 0.$$

Pongamos $g := \varphi \circ R_A$. Entonces g es holomorfa en \mathbb{C} :

$$\lim_{\xi \rightarrow \lambda} \frac{g(\xi) - g(\lambda)}{\xi - \lambda} = \lim_{\xi \rightarrow \lambda} g \left(\frac{1}{\xi - \lambda} (R_A(\xi) - R_A(\lambda)) \right) = -g(R_A(\lambda)^2).$$

Además, como $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|R_A(\lambda)\| = 0$, tenemos $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} g(\lambda) = 0$.

Demostración

Supongamos que $\text{sp}(A) = \emptyset$. Entonces el dominio de R_A es \mathbb{C} .

Notamos que $R_A(0) \neq 0$. Por Hahn–Banach, encontramos $\varphi \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(V), \mathbb{C})$ tal que

$$\varphi(R_A(0)) \neq 0.$$

Pongamos $g := \varphi \circ R_A$. Entonces g es holomorfa en \mathbb{C} :

$$\lim_{\xi \rightarrow \lambda} \frac{g(\xi) - g(\lambda)}{\xi - \lambda} = \lim_{\xi \rightarrow \lambda} g \left(\frac{1}{\xi - \lambda} (R_A(\xi) - R_A(\lambda)) \right) = -g(R_A(\lambda)^2).$$

Además, como $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|R_A(\lambda)\| = 0$, tenemos $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} g(\lambda) = 0$.

En particular, esto implica que g es acotada.

Demostración

Supongamos que $\text{sp}(A) = \emptyset$. Entonces el dominio de R_A es \mathbb{C} .

Notamos que $R_A(0) \neq 0$. Por Hahn–Banach, encontramos $\varphi \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(V), \mathbb{C})$ tal que

$$\varphi(R_A(0)) \neq 0.$$

Pongamos $g := \varphi \circ R_A$. Entonces g es holomorfa en \mathbb{C} :

$$\lim_{\xi \rightarrow \lambda} \frac{g(\xi) - g(\lambda)}{\xi - \lambda} = \lim_{\xi \rightarrow \lambda} g \left(\frac{1}{\xi - \lambda} (R_A(\xi) - R_A(\lambda)) \right) = -g(R_A(\lambda)^2).$$

Además, como $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|R_A(\lambda)\| = 0$, tenemos $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} g(\lambda) = 0$.

En particular, esto implica que g es acotada.

Por el teorema de Liouville, g es la constante 0.

Demostración

Supongamos que $\text{sp}(A) = \emptyset$. Entonces el dominio de R_A es \mathbb{C} .

Notamos que $R_A(0) \neq 0$. Por Hahn–Banach, encontramos $\varphi \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(V), \mathbb{C})$ tal que

$$\varphi(R_A(0)) \neq 0.$$

Pongamos $g := \varphi \circ R_A$. Entonces g es holomorfa en \mathbb{C} :

$$\lim_{\xi \rightarrow \lambda} \frac{g(\xi) - g(\lambda)}{\xi - \lambda} = \lim_{\xi \rightarrow \lambda} g \left(\frac{1}{\xi - \lambda} (R_A(\xi) - R_A(\lambda)) \right) = -g(R_A(\lambda)^2).$$

Además, como $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|R_A(\lambda)\| = 0$, tenemos $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} g(\lambda) = 0$.

En particular, esto implica que g es acotada.

Por el teorema de Liouville, g es la constante 0. En particular, $g(0) = 0$. Contradicción.