Función Gamma de Euler: definición, fórmula recursiva y continuidad

Objetivos. Demostrar que la función Gamma de Euler, definida por medio de la integral de Euler del primer tipo

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,$$

está bien definida (la integral converge), satisface la fórmula recursiva

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

y es continua en $(0, +\infty)$.

Integrales auxiliares

1 Proposición. *Para cada $x > 0$,*

$$\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}.$$

Demostración.

$$\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \lim_{u\to 0^+} \int_u^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \lim_{u\to 0^+} \frac{t^x}{x}\bigg|_u^1 = \lim_{u\to 0^+} \frac{1-u^x}{x} = \frac{1}{x}.$$

□

2 Proposición. *Para cada $\alpha > 0$,*

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}.$$

Demostración.

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \lim_{v\to +\infty} \int_0^v \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{\alpha}\bigg|_{+\infty}^0 = \frac{1}{\alpha}.$$

□

3 Proposición. *Para cada m en $\mathbb{N}$ y cada $t \geq 1$,*

$$t^m \leq m!\,2^m\,\mathrm{e}^{t/2}.$$

Demostración.

$$\mathrm{e}^{t/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{t}{2}\right)^k \geq \frac{t^m}{2^m\,m!}.$$

□

4 Proposición. *Para cada $b > 0$,*

$$\int_1^{+\infty} t^{b-1}\, e^{-t}\, dt < +\infty.$$

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $m \geq b - 1$ (por ejemplo, $m := \lfloor b \rfloor$). Entonces, por las Proposiciones 3 y 2,

$$\int_1^{+\infty} t^{b-1}\, e^{-t}\, dt \leq \int_1^{+\infty} t^{m}\, e^{-t}\, dt \leq 2^m\, m! \int_1^{+\infty} e^{-t/2}\, dt < +\infty. \qquad \square$$

Definición de la función Γ

5 Proposición. *Para cada $x > 0$,*

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt < +\infty.$$

Demostración. Se sigue de las Proposiciones 1 y 4:

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt = \int_0^{1} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt \leq \int_0^{1} t^{x-1}\, dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt < +\infty.$$

$\square$

6 Definición (la función Gamma de Euler)**.** Definimos $\Gamma\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt.$$

Continuidad de la función Γ

7 Proposición. *La función Γ es continua.*

Demostración. Es suficiente mostrar que Γ es continua en cada intervalo de la forma (a, b), donde $0 < a < b < +\infty$, porque cada punto $(0, +\infty)$ pertenece a un intervalo esta forma.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $0 < a < b$. Definimos $f\colon (0, +\infty) \times (a, b) \to \mathbb{R}$, $g\colon (0, +\infty) \to [0, +\infty)$ mediante las siguientes reglas:

$$f(t, x) := e^{-t}\, t^{x-1}, \qquad g(t) := \begin{cases} e^{-t}\, t^{a-1}, & 0 < t \leq 1; \\ e^{-t}\, t^{b-1}, & t > 1. \end{cases}$$

Para cada t en $(0, +\infty)$, la función f_t es continua. Si $t \in (0, 1]$ y $x \in (a, b)$, entonces $t^{x-1} \le t^{a-1}$. Si $t \in (1, +\infty)$ y $x \in (a, b)$, entonces $t^{x-1} \le t^{b-1}$. Luego para cada t en $(0, +\infty)$ y cada x en (a, b) se cumplen las desigualdades

$$0 \le f(t, x) \le g(t).$$

Usando las Proposiciones 1 y 4 Probemos que g es integrable:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t &= \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-t}\, t^{a-1}\,\mathrm{d}t + \int\limits_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{b-1}\,\mathrm{d}t \\
&\le \int\limits_0^1 t^{-a}\,\mathrm{d}t + \int\limits_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{b-1}\,\mathrm{d}t < +\infty.
\end{aligned}$$

Se cumplen las condiciones del teorema sobre la continuidad de una función definida por una integral con parámetro. Por este teorema, Γ es continua en (a, b). Como los intervalos de esta forma cubren $(0, +\infty)$, concluimos que Γ es continua en $(0, +\infty)$. $\square$

Fórmula recursiva para la función Γ

8 Proposición (fórmula recursiva para la función Γ)**.** *Para cada $x > 0$,*

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x).$$

9 Proposición (relación entre la función Γ y la función factorial)**.** *Para cada n en $\mathbb{N}_0$,*

$$\Gamma(n + 1) = n!.$$