

Funciones Γ y B

Función Γ y sus propiedades básicas

Definición. $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0).$

1. Ecuación funcional para Γ (relación de recurrencia).

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (x > 0).$$

2. $\Gamma(1) = 1.$

3. Γ y factorial. $\Gamma(n) = (n-1)!$ para $n = 1, 2, 3, \dots$

4. Fórmula de reflexión (= fórmula de los complementos).

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (0 < x < 1).$$

En particular $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$

5. Calcular $\Gamma(\frac{1}{2}), \Gamma(\frac{3}{2}), \Gamma(\frac{5}{2}), \Gamma(n + \frac{1}{2})$ con $n \in \mathbb{N}.$

Función B y sus propiedades básicas

Definición. $B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad (x, y > 0).$

6. Otra expresión integral. $B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du.$

Indicación: en la integral que define B hacer el cambio $t = \frac{u}{1+u}.$

7. Fórmula trigonométrica.

$$B(p, q) = 2 \cdot \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2p-1} (\cos \theta)^{2q-1} d\theta.$$

De aquí

$$\int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^x (\cos \theta)^y d\theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}\right) \quad (x > -1, y > -1).$$

8. Expresión de B a través de Γ .

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Demostración. Está basada en la fórmula trigonométrica para la función B.

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{x-1} du \int_0^{+\infty} e^{-v} v^{y-1} dv \\ &= 4 \int_0^{+\infty} e^{-a^2} a^{2x-1} da \int_0^{+\infty} e^{-b^2} b^{2y-1} db = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(a^2+b^2)} a^{2x-1} b^{2y-1} da db \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{2x+2y-2} r dr \cdot 2 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2x-1} (\sin \theta)^{2y-1} d\theta = \Gamma(x+y)B(x, y). \quad \square\end{aligned}$$

$$9. \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx = \frac{1}{q} \Gamma\left(\frac{p}{q}\right) \Gamma\left(1 - \frac{p}{q}\right) = \frac{\pi}{q \sin \frac{p\pi}{q}}.$$

Cálculo de algunas integrales a través de las funciones Γ y B

$$10. \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0).$$

$$11. \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx.$$

$$12. \int_0^{+\infty} x^p e^{-ax} \ln x dx.$$

$$13. \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln x}{1+x} dx.$$

Ejercicios: calcular integrales usando las funciones Γ y B

$$14. \int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx.$$

$$15. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

$$16. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}.$$

$$17. \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cdot \cos^4 x dx.$$

$$18. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} \quad (n > 1).$$

$$19. \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx \quad (n \in \mathbb{Z}, n > 0).$$

$$20. \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^n x dx.$$

$$21. \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx.$$

$$22. \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln^2 x}{1+x} dx.$$

$$23. \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{1+x^3} dx.$$