Teorema Fubini

Objetivos. Demostrar el teorema de Fubini y conocer un contraejemplo que muestra la importancia de algunas condiciones del teorema.

Requisitos. Definición del producto de medidas, teorema de Tonelli.

1 Teorema (Tonelli, repaso)**.** *Sean* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *y* $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ *espacios de medidas σ-finitas, y sea* $f \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G}, [0, +\infty])$*. Pongamos*

$$u(x) \coloneqq \int\limits_Y f_x \,\mathrm{d}\nu \qquad (x \in X), \qquad\qquad v(y) \coloneqq \int\limits_X f^y \,\mathrm{d}\mu \qquad (y \in Y).$$

Entonces $u \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$*,* $v \in \mathcal{M}(Y, \mathcal{G}, [0, +\infty])$*, y*

$$\int\limits_X u \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{X \times Y} f \,\mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int\limits_Y v \,\mathrm{d}\nu.$$

2 Teorema (Fubini)**.** *Sean* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *y* $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ *espacios de medidas σ-finitas, y sea* $f \in L^1(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mathbb{C})$*. Entonces* $f_x \in L^1(Y, \mathcal{G}, \nu)$ *para casi todo punto x en X,* $f^y \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ *para casi todo punto y en Y, las funciones u y v definidas en casi todos puntos mediante*

$$u(x) \coloneqq \int\limits_Y f_x \,\mathrm{d}\nu \qquad (x \in X), \qquad\qquad v(y) \coloneqq \int\limits_X f^y \,\mathrm{d}\mu \qquad (y \in Y),$$

son integrables, y

$$\int\limits_X u \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{X \times Y} f \,\mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int\limits_Y v \,\mathrm{d}\nu.$$

Demostración. Obviamente el caso complejo se reduce al caso real, por eso consideremos solamente el caso real. Pongamos

$$u_1(x) \coloneqq \int\limits_Y (f_+)_x \,\mathrm{d}\nu \qquad (x \in X), \qquad v_1(y) \coloneqq \int\limits_X (f_+)^y \,\mathrm{d}\mu \qquad (y \in Y),$$

y de manera similar definimos u_2 y v_2 a partir de la función f_-. Como $f_+ \le |f|$ y $f_- \le |f|$, tenemos que $f_+, f_- \in L^1(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mu \times \nu, [0, +\infty])$, y por el teorema de Tonelli

$$\int\limits_X u_1 \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{X \times Y} f_+ \,\mathrm{d}(\mu \times \nu) < +\infty, \qquad \int\limits_X u_2 \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{X \times Y} f_- \,\mathrm{d}(\mu \times \nu) < +\infty, \tag{1}$$

así que $u_1, u_2 \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty])$. Pongamos

$$E \coloneqq \{x \in X\colon \quad u_1(x) = +\infty \quad \vee \quad u_2(x) = +\infty\}.$$

Entonces $\mu(E) = 0$. Para cada x en $X \setminus E$ tenemos

$$\int_Y (f_+)_x \, \mathrm{d}\nu < +\infty, \quad \int_Y (f_-)_x \, \mathrm{d}\nu < +\infty,$$

así que $f_x = (f_+)_x - (f_-)_x \in L^1(Y, \mathcal{G}, \nu)$. Más aún, para cada x en $X \setminus E$ tenemos $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$, así que $u \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$. Restando las igualdades (1), obtenemos una de las igualdades requeridas, y la otra se demuestra de manera similar. $\square$

3 Ejemplo. Sea $X = Y = [0, 1]$, μ y ν es la medida de Lebesgue en $[0, 1]$. Elegimos una sucesión estrictamente creciente $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ tal que $a_0 = 0$ y $a_n \to 1$ cuando n tiende a infinito. Para cada n construimos g_n como una función real continua con soporte en (a_n, a_{n+1}) y tal que

$$\int_{[0,1]} g_n(t) \, dt = 1.$$

Pongamos

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x)) g_n(y).$$

Notemos que para cada (x, y) en $[0, 1]^2$ solamente un término en esta serie puede ser distinto de cero, así que la suma tiene sentido. Se puede ver que

$$\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} f(x, y) \, \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y) = 0, \qquad \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} f(x, y) \, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = 1.$$