# Transformada de Fourier para funciones de la clase de Schwartz

**Definición 1.** Denotemos por $C^\infty(\mathbb{R})$ al conjunto de todas las funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que son infinitamente derivables.

**Definición 2.** Dada una función $f$ de clase $C^\infty(\mathbb{R})$ y un par de números $k, m \in \mathbb{N}_0$, pongamos

$$\|f\|_{k,m} := \sup_{x\in\mathbb{R}} \left((1+|x|)^k |f^{(m)}(x)|\right).$$

La *clase de Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ se define como el conjunto de todas las funciones $f$ de clase $C^\infty(\mathbb{R})$ tales que $\|f\|_{k,m} < +\infty$ para cualesquiera $k, m \in \mathbb{N}_0$.

**Proposición 3.** *Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$*;*

(b) *para cada $p$ y $m$ en $\mathbb{N}_0$,*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(|x|^p |f^{(m)}(x)|\right) < +\infty;$$

(c) *para cada $m$ en $\mathbb{N}_0$ y cada polinomio $P$,*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| P(x) |f^{(m)}(x)|\right) < +\infty.$$

*Demostración.* La implicación (a)⇒(b) se sigue de la desigualdad $|x|^p \leqslant (1+|x|)^p$, y la implicación (a)⇒(b) se sigue de la identidad

$$(1+|x|)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} |x|^k.$$

Para ver que (b) implica (c), recordamos que cada polinomio $P$ es una combinación lineal de monomios. Para ver que (c) implica (b), recordamos que cada monomio es un polinomio. □

**Proposición 4.** *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y sea $P$ una función polinomial. Entonces $fP \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

**Proposición 5.** *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y sea $m \in \mathbb{N}_0$. Entonces $f^{(m)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

**Ejemplo 6.** Sea $P$ un polinomio de una variable con coeficientes reales o complejos. Pongamos

$$f(x) = P(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Entonces $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

**Proposición 7.** $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subsetneq L^1(\mathbb{R})$.

**Proposición 8** (la transformada de Fourier de la derivada, repaso)**.** *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que su derivada $f'$ existe $\mu$-c.t.p. y pertenece a $L^1(\mathbb{R})$. Entonces*

$$(\mathcal{F}f')(\xi) = 2\pi\,\mathrm{i}\,\xi\,\widehat{f}(\xi).$$

**Proposición 9** (la transformada de Fourier de una función multiplicada por la función identidad, repaso)**.** *Supongamos que*

$$\int_{\mathbb{R}} |x|\,|f(x)|\,dx < +\infty.$$

*Entonces $\widehat{f}$ es derivable y*

$$\widehat{f}'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (-2\pi\,\mathrm{i}\,x) f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}\,dx.$$

**Proposición 10.** *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Entonces $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

*Demostración.* Sean $p, m \in \mathbb{N}_0$. Demostremos que

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left( |\xi|^p |\widehat{f}^{(m)}(\xi)| \right) < +\infty.$$

Pongamos

$$g(x) = (-2\pi\,\mathrm{i}\,x)^m f(x).$$

Entonces $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $\widehat{g} = \widehat{f}^{(m)}$. Ahora pongamos

$$h(x) = \frac{1}{(2\pi\,\mathrm{i})^p} g^{(p)}(x).$$

Entonces $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $\widehat{h} \in L^\infty(\mathbb{R})$, pero

$$\widehat{h}(\xi) = \xi^p \widehat{g}(\xi) = \xi^p \widehat{f}^{(m)}.$$ □

**Proposición 11** (la convolución de una función con el núcleo de calor, repaso)**.** *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces para cada $t > 0$*

$$\int_{\mathbb{R}} H_t(y) f(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-4\pi^2 t|\xi|^2}\,\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\,d\xi. \tag{1}$$

**Proposición 12.** *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Entonces para cada $x$ en $\mathbb{R}$*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\,d\xi.$$

*Demostración.* Fijamos $x$ en $x \in \mathbb{R}$. Vamos a pasar al límite cuando $t$ tiende a 0, en la fórmula (1). Como $f$ es continua en $x$ y acotada, $(H_t * f)(x) \to f(x)$ cuando $t$ tiende a 0. La función bajo la integral del lado derecho se puede acotar por la función integrable $|\widehat{f}|$:

$$|\,\mathrm{e}^{-4\pi^2 t|\xi|^2}\,\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\,| \leqslant |\widehat{f}(\xi)|.$$

Por eso se puede aplicar el teorema de Lebesgue de la convergencia dominada. Finalmente notamos que

$$\lim_{t\to 0} \mathrm{e}^{-4\pi^2 t|\xi|^2}\,\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x} = \widehat{f}(\xi).$$ □