

# Transformada de Fourier del núcleo de Poisson

Primero recordemos dos propiedades elementales de la transformada de Fourier que se demuestran fácilmente con cambios de variables.

**Proposición 1** (sobre la paridad de la transformada de Fourier). *Sea  $f$  una función integrable y par:  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $f(-x) = f(x)$  para casi todo  $x$  en  $\mathbb{R}$ . Entonces la función  $\widehat{f}$  también es par.*

**Proposición 2** (sobre la transformada de Fourier de la función dilatada). *Sean  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $\lambda > 0$ . Pongamos*

$$g(x) := f(\lambda x).$$

*Entonces para cada  $\xi$  en  $\mathbb{R}$ ,*

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\lambda} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).$$

Calculemos la transformada de Fourier de un caso especial del núcleo de Poisson.

**Proposición 3.** *Sea*

$$f(x) := \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

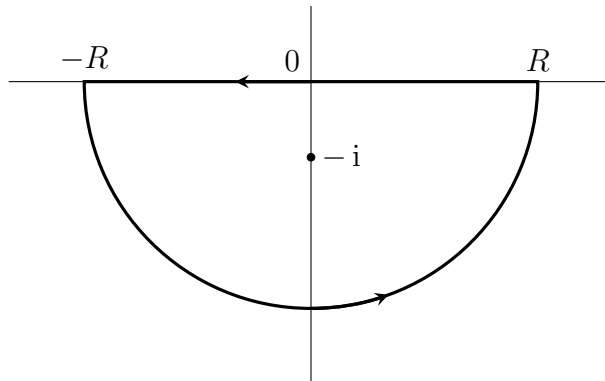
*Entonces*

$$\widehat{f}(\xi) = e^{-2\pi|\xi|} \quad (\xi \in \mathbb{R}).$$

*Demostración basada en herramientas básicas de análisis complejo.* Sea  $\xi > 0$ . Consideremos la función  $F_\xi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$F_\xi(z) := \frac{e^{-2\pi i \xi z}}{\pi(1+z^2)}.$$

Para cada  $R > 2$  vamos a integrar  $F_\xi$  sobre el contorno  $\Gamma_R$  que se muestra en el dibujo. El contorno consiste de dos partes: 1) el segmento que une los puntos  $R$  y  $-R$ ; 2) la semicircunferencia inferior con centro 0 y de radio  $R$ . El contorno tiene orientación positiva (contra las manecillas del reloj).



En el dominio que se abarca por el contorno  $\Gamma_R$ , la función  $F_\xi$  tiene una única singularidad en el punto  $-i$ . Por el teorema sobre los residuos,

$$\int_{\gamma_R} F_\xi(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}(F, -i).$$

Cambiamos la orientación del contorno: en el segmento horizontal usemos la parametrización  $z = t$ ,  $-R \leq t \leq R$ , y en el arco usemos la parametrización  $z = R e^{-it}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ . Obtenemos

$$I_{1,\xi}(R) + I_{2,\xi}(R) = -2\pi i \operatorname{res}(F_\xi, -i), \quad (1)$$

donde

$$I_{1,\xi}(R) = \int_{-R}^R F_\xi(t) dt, \quad I_{2,\xi}(R) = \int_0^\pi F_\xi(R e^{-it}) (-iR) dt.$$

Cuando  $R$  tiende a  $+\infty$ , la integral  $I_{1,\xi}(R)$  tiende a la integral que nos interesa:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} I_{1,\xi}(R) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R F_\xi(t) dt = \widehat{f}(\xi).$$

Vamos a demostrar que la segunda integral tiende a cero. Notemos que

$$\left| e^{-2\pi i \xi R e^{-it}} \right| = \left| e^{-2\pi i \xi R (\cos t - i \sin t)} \right| = e^{-2\pi \xi R \sin t} \leq 1,$$

$$\left| 1 + R^2 e^{-2it} \right| = R^2 |e^{-2it}| \left| 1 + \frac{1}{R^2} e^{2it} \right| \geq R^2 \left( 1 - \frac{1}{R^2} \right) \geq \frac{3}{4} R^2,$$

y

$$|I_{2,\xi}(R)| = \left| \int_0^\pi F_\xi(R e^{-it}) (-iR) dt \right| \leq R \int_0^\pi \frac{|e^{-2\pi i \xi R e^{-it}}|}{\pi |1 + R^2 e^{-2it}|} dt \leq \frac{R}{\frac{3}{4} R^2} = \frac{4}{3R}.$$

Esta cota superior demuestra que  $I_{2,\xi}(R)$  tiende a cero cuando  $R$  tiende a  $+\infty$ . Notamos que  $-i$  es un polo simple de  $F_\xi$ , y el residuo se calcula de la siguiente manera:

$$\operatorname{res}(F_\xi, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} (z + i) F_\xi(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{e^{-2\pi i z}}{\pi(z - i)} = -\frac{1}{2\pi i} e^{-2\pi \xi}.$$

En la igualdad (1) pasamos al límite cuando  $R$  tiende a  $+\infty$  y obtenemos

$$\widehat{f}(\xi) + 0 = e^{-2\pi \xi}.$$

La fórmula sigue siendo válida también para  $\xi = 0$ :

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi} \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) \right) = 1.$$

Finalmente notamos que la función  $f$  es par, luego su transformada de Fourier  $\widehat{f}$  es par, y para cualquier  $\xi$  en  $\mathbb{R}$

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(|\xi|) = e^{-2\pi|\xi|}. \quad \square$$

La siguiente demostración es más rápida, pero requiere el conocimiento de la respuesta final y la fórmula de inversión de Fourier: si  $g \in L^1(\mathbb{R})$  y  $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ , entonces

$$g(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(x) e^{2\pi i x \xi} dx. \quad (2)$$

*Segunda demostración de la Proposición 3.* Queremos demostrar que  $\widehat{f} = g$ , donde

$$g(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}.$$

Notamos que la función  $g$  es integrable. Vamos a calcular su transformada de Fourier:

$$\widehat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi|\xi|} e^{-2\pi i \xi x} d\xi = \int_0^{+\infty} e^{-2\pi\xi - 2\pi i x \xi} d\xi + \int_{-\infty}^0 e^{2\pi\xi - 2\pi i x \xi} d\xi.$$

En la segunda integral hacemos el cambio de variable  $\eta = -\xi$ :

$$\begin{aligned} \widehat{g}(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-2\pi(1+i x)\xi} d\xi + \int_0^{+\infty} e^{-2\pi(1-i x)\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi(1+i x)} + \frac{1}{2\pi(1-i x)} = \frac{1}{\pi(1+x^2)} = f(x). \end{aligned}$$

Hemos demostrado que  $\widehat{g} = f$ . Además, es obvio que  $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ . Aplicamos la fórmula de inversión de Fourier:

$$g(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i x \xi} dx.$$

Pongamos  $-\xi$  en vez de  $\xi$ . El lado izquierdo no se cambia porque la función  $g$  es par:

$$g(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \widehat{f}(\xi). \quad \square$$

Ahora es fácil calcular la transformada de Fourier del núcleo de Poisson el cual se define como la siguiente familia de funciones  $(P_y)_{y>0}$ :

$$P_y(x) := \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)}.$$

**Proposición 4** (la transformada de Fourier del núcleo de Poisson). *Para cada  $y > 0$ ,*

$$\widehat{P}_y(\xi) = e^{-2\pi y|\xi|} \quad (\xi \in \mathbb{R}).$$

*Demostración.* Sea  $f$  la función introducida en la Proposición 3. Notamos que

$$P_y(x) = \frac{1}{\pi y \left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)} = \frac{1}{y} f\left(\frac{x}{y}\right).$$

Aplicamos la Proposición 2 sobre la transformada de Fourier de la función dilatada, con  $\lambda = 1/y$ :

$$\widehat{P}_y(\xi) = \frac{1}{y} \frac{1}{\lambda} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) = \widehat{f}(y\xi) = e^{-2\pi y|\xi|} \quad (\xi \in \mathbb{R}). \quad \square$$