Transformada de Fourier del núcleo de Poisson

Primero recordemos dos propiedades elementales de la transformada de Fourier que se demuestran fácilmente con cambios de variables.

Proposición 1 (sobre la paridad de la transformada de Fourier)**.** *Sea f una función integrable y par: $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f(-x) = f(x)$ para casi todo x en $\mathbb{R}$. Entonces la función $\widehat{f}$ también es par.*

Proposición 2 (sobre la transformada de Fourier de la función dilatada)**.** *Sean $f \in L^(\mathbb{R})$, $\lambda > 0$. Pongamos*

$$g(x) := f(\lambda x).$$

Entonces para cada ξ en $\mathbb{R}$,

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\lambda}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).$$

Calculemos la transformada de Fourier de un caso especial del núcleo de Poisson.

Proposición 3. *Sea*

$$f(x) := \frac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

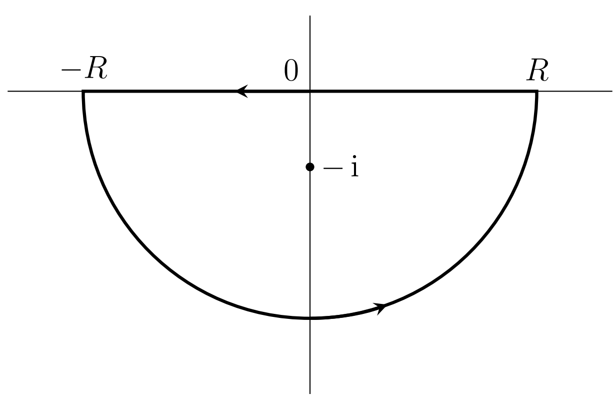
Entonces

$$\widehat{f}(\xi) = \mathrm{e}^{-2\pi|\xi|} \qquad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Demostración basada en herramientas básicas de análisis complejo. Sea $\xi > 0$. Consideremos la función $F_\xi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$F_\xi(z) := \frac{\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi z}}{\pi(1+z^2)}.$$

Para cada $R > 2$ vamos a integrar F_ξ sobre el contorno Γ_R que se muestra en el dibujo. El contorno consiste de dos partes: 1) el segmento que une los puntos R y $-R$; 2) la semicircunferencia inferior con centro 0 y de radio R. El contorno tiene orientación positiva (contra las manecillas del reloj).



En el dominio que se abarca por el contorno Γ_R, la función F_ξ tiene una única singularidad en el punto $-\mathrm{i}$. Por el teorema sobre los residuos,

$$\int_{\gamma_R} F_\xi(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{res}(F,-\mathrm{i}).$$

Cambiamos la orientación del contorno, en el segmento horizontal usamos la parametrización $z = t$, $-R \leqslant t \leqslant R$, y en el arco usamos la parametrización $z = R\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Obtenemos

$$I_{1,\xi}(R) + I_{2,\xi}(R) = -2\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{res}(F_\xi,-\mathrm{i}), \tag{1}$$

donde

$$I_{1,\xi}(R) = \int_{-R}^{R} F_\xi(t)\,\mathrm{d}t, \qquad I_{2,\xi}(R) = \int_0^{\pi} F_\xi(R\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t})\,(-\mathrm{i}\,R)\,\mathrm{d}t.$$

Cuando R tiende a $+\infty$, la integral $I_{1,\xi}(R)$ tiende a la integral que nos interesa:

$$\lim_{R\to+\infty} I_{1,\xi}(R) = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} F_\xi(t)\,\mathrm{d}t = \widehat{f}(\xi).$$

Vamos a demostrar que la segunda integral tiende a cero. Notemos que

$$\left|\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi R\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}\right| = \left|\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi R(\cos t - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,t)}\right| = \mathrm{e}^{-2\pi\xi R\,\mathrm{sen}\,t} \leqslant 1,$$

$$\left|1 + R^2\,\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,t}\right| = R^2\left|\,\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,t}\,\right|\left|1 + \frac{1}{R^2}\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,t}\right| \geqslant R^2\left(1 - \frac{1}{R^2}\right) \geqslant \frac{3}{4}R^2,$$

y

$$|I_{2,\xi}(R)| = \left|\int_0^{\pi} F_\xi(R\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t})\,(-\mathrm{i}\,R)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant R\int_0^{\pi} \frac{|\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi R\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}\,|}{\pi|1 + R^2\,\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,t}\,|}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{R}{\frac{3}{4}R^2} = \frac{4}{3R}.$$

Esta cota superior demuestra que $I_{2,\xi}(R)$ tiende a cero cuando R tiende a $+\infty$. Notamos que $-\mathrm{i}$ es un polo simple de F_ξ, y el residue se calcula de la siguiente manera:

$$\mathrm{res}(F_\xi,-\mathrm{i}) = \lim_{z\to-\mathrm{i}} (z+\mathrm{i})F_\xi(z) = \lim_{z\to-\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,z}}{\pi(z-\mathrm{i})} = -\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{-2\pi\xi}.$$

En la igualdad (1) pasamos al límite cuando R tiende a $+\infty$ y obtenemos

$$\widehat{f}(\xi) + 0 = \mathrm{e}^{-2\pi\xi}.$$

La fórmula sigue siendo válida también para $\xi = 0$:

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{1}{\pi}\left(\lim_{x\to+\infty}\arctan(x) - \lim_{x\to-\infty}\arctan(x)\right) = 1.$$

Finalmente notamos que la función f es par, luego su transformada de Fourier $\widehat{f}$ es par, y para cualquier ξ en $\mathbb{R}$

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(|\xi|) = \mathrm{e}^{-2\pi|\xi|}. \qquad \square$$

La siguiente demostración es más rápida, pero requiere el conocimiento de la respuesta final y la fórmula de inversión de Fourier: si $g \in L^1(\mathbb{R})$ y $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$g(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(x)\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}\, \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Demostración basada en la fórmula de inversión de Fourier. Tenemos por demostrar que $\widehat{f} = g$, donde

$$g(\xi) = \mathrm{e}^{-2\pi|\xi|}.$$

Notamos que la función g es integrable. Vamos a calcular su transformada de Fourier:

$$\widehat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\pi|\xi|}\, \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\, \mathrm{d}\xi = \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\pi\xi - 2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}\, \mathrm{d}\xi + \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2\pi\xi - 2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}\, \mathrm{d}\xi$$

en la segunda integral hacemos el cambio de variable $\eta = -\xi$:

$$\begin{aligned} &= \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\pi(1+\mathrm{i}\,x)\xi}\, \mathrm{d}\xi + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\pi(1-\mathrm{i}\,x)\xi}\, \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2\pi(1+\mathrm{i}\,x)} + \frac{1}{2\pi(1-\mathrm{i}\,x)} = \frac{1}{\pi(1+x^2)} = f(x). \end{aligned}$$

Hemos demostrado que $\widehat{g} = f$. Además es obvio que $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$. Aplicamos la fórmula de inversión de Fourier:

$$g(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}\, \mathrm{d}x.$$

Pongamos $-\xi$ en vez de ξ. El lado izquierdo no se cambia porque la función g es par:

$$g(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}\, \mathrm{d}x = \widehat{f}(\xi).$$

□

Ahora es fácil calcular la transformada de Fourier del núcleo de Poisson el cual se define como la familia de funciones $(P_y)_{y>0}$,

$$P_y(x) := \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)}.$$

Proposición 4 (transformada de Fourier del núcleo de Poisson)**.** *Para cada* $y > 0$

$$\widehat{P_y}(\xi) = \mathrm{e}^{-2\pi y|\xi|} \qquad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Demostración. Sea f la función introducida en la Proposición 3. Notamos que

$$P_y(x) = \frac{1}{\pi y \left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)} = \frac{1}{y} f\left(\frac{x}{y}\right).$$

Aplicamos la Proposición 2 sobre la transformada de Fourier de la función dilatada, con $\lambda = 1/y$:

$$\widehat{P_y}(\xi) = \frac{1}{y}\frac{1}{\lambda}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) = \widehat{f}(y\xi) = \mathrm{e}^{-2\pi y|\xi|} \qquad (\xi \in \mathbb{R}).$$

□