Transformada integral de Fourier sobre el grupo de los números reales

Objetivos. Estudiar propiedades básicas de la transformada de Fourier de funciones integrables en $\mathbb{R}$.

En estos apuntes denotamos por μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Definición 1 (la transformada de Fourier de una función integrable)**.** Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Denotemos por $\mathcal{F}f$ o por $\widehat{f}$ a la función $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida mediante la siguiente regla:

$$\widehat{f}(\xi) \coloneqq \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\, f(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Observación 2. Denotamos por $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ al espacio prenormado de las funciones Lebesgue integrables y por $L^1(\mathbb{R})$ al espacio normado de sus clases de equivalencia. Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y $f \sim g$, es decir, f y g son iguales μ-c.t.p., entonces para cada ξ en $\mathbb{R}$ tenemos que

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\, f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\, g(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Por lo tanto, podemos pensar que la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ está bien definida en clases de equivalencia, y la definición 1 es consistente. En lo que sigue, pasamos libremente de funciones integrables a sus clases de equivalencia, es decir, de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ a $L^1(\mathbb{R})$.

Proposición 3 (la transformada de Fourier de una función integrable es acotada)**.** *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces, $\mathcal{F}f \in B(\mathbb{R})$. Más aún, para cada ξ en $\mathbb{R}$,*

$$\|\widehat{f}\|_{\sup} \le \|f\|_1.$$

Demostración. Para cada ξ en $\mathbb{R}$,

$$|\widehat{f}(\xi)| \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\, f(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) = \|f\|_1. \qquad \square$$

Corolario 4. *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces,*

$$\|\widehat{f} - \widehat{g}\|_{\sup} \le \|f - g\|_1.$$

Demostración. Aplicamos la Proposición 3 a la función $f - g$. $\square$

Observación 5. El Corolario 4 nos dice que cuando aproximamos f por g en el sentido de la norma $\|\cdot\|_1$, la transformada de Fourier $\mathcal{F}f$ se aproxima por $\mathcal{F}g$ en el sentido de la norma uniforme. Este hecho simple se puede usar para demostrar algunas propiedades de $\mathcal{F}f$ primero para las funciones f "buenas" o "simples" en algún sentido, y luego para las funciones integrables generales.

Recordemos una propiedad conocida de funciones Lebesgue integrables en $\mathbb{R}$.

Lema 6. *Sean $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $L > 0$ tal que*

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-L,L)} |f| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Demostración. Pongamos $g_k = f 1_{\mathbb{R}\setminus(-k,k)}$. Entonces la sucesión $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tiende a la función constante cero de manera puntual. Además, $|g_k| \le |f|$ para cada k, y la función $|f|$ es integrable. Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue,

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} |g_k| \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Encontramos k tal que $\int_{\mathbb{R}} |g_k| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon$, esto es,

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-k,k)} |f| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon,$$

ponemos $L = k$ y obtenemos el resultado requerido. $\square$

Lema 7. *Para cada x en $\mathbb{R}$,*

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - 1| = 2 \left| \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right|.$$

Demostración. Factorizamos $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x/2}$:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x/2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x/2} \right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x/2} \left(2\,\mathrm{i} \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right).$$

Sacando el valor absoluto obtenemos el resultado. $\square$

Lema 8. *Para cada x en $\mathbb{R}$,*

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - 1| \le |x|.$$

Demostración 1. Sale del Lema 7 aplicando la desigualdad $|\operatorname{sen} \alpha| \le |\alpha|$ con $\alpha = x/2$. $\square$

Demostración 2. Notamos que la derivada de la función $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$ es $t \mapsto \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$. Dado $x > 0$, aplicamos el segundo teorema fundamental de cálculo:

$$\int\limits_0^x \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} \, \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - 1.$$

Sacamos el valor absoluto de ambos lados y acotamos el valor absoluto de la integral por la integral del valor absoluto:

$$\left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - 1 \right| \le \left| \int\limits_0^x \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} \, \mathrm{d}t \right| \le \int\limits_0^x \left| \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} \right| \, \mathrm{d}t \le \int\limits_0^x 1 \, \mathrm{d}t = x.$$

Para $x < 0$, podemos integrar de x a 0 o aplicar la paridad. $\square$

Proposición 9. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces, la función $\widehat{f}$ es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Tenemos que encontrar $\delta > 0$ tal que para cada cualesquier $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, si $|\xi - \eta| \le \delta$, entonces $|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| \le \varepsilon$. Pongamos $h = \xi - \eta$. Notamos que

$$\left|\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x} - \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\eta x}\right| = \left|\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\eta x}\right| \left|\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,hx} - 1\right|.$$

Luego

$$\begin{aligned}
|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| &\le \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x} - \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\eta x}\right| |f(x)| \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&\le \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,hx} - 1\right| |f(x)| \,\mathrm{d}\mu(x).
\end{aligned}$$

Para cualquier $L > 0$, la última integral se puede dividir en dos partes de la siguiente manera:

$$\int\limits_{(-L,L)} \left|\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,hx} - 1\right| |f(x)| \,\mathrm{d}\mu(x) + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-L,L)} \left|\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,hx} - 1\right| |f(x)| \,\mathrm{d}\mu(x).$$

En la segunda integral no podemos controlar el valor del producto $2\pi hx$, por eso acotamos $|\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,hx} - 1|$ de manera trivial:

$$|\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,hx} - 1| \le |\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,hx}| + 1 = 2.$$

En la primera integral acotamos $|\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,hx} - 1|$ de otra manera, usando el Lema 8 y la desigualdad $|x| \le L$:

$$\left|\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,hx} - 1\right| \le |2\pi\,\mathrm{i}\,hx| = 2\pi h|x| \le 2\pi hL.$$

Luego

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| \le |h| 2\pi L \int\limits_{(-L,L)} |f(x)| \,\mathrm{d}\mu(x) + 2 \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-L,L)} |f(x)| \,\mathrm{d}\mu(x).$$

Elegimos L como en el Lema 6, con $\varepsilon/4$ en vez de ε. Obtenemos

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| \le |h|\, 2\pi L \|f\|_1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pongamos

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2(2\pi L\|f\|_1 + 1)}.$$

Entonces, para cualesquiera ξ, η en $\mathbb{R}$ con $|\xi - \eta| \le \delta$, se cumple la desigualdad

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| \le \varepsilon. \qquad \square$$

Proposición 10 (la fórmula de reciprocidad de Fourier)**.** *Sean* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$*. Entonces,*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\, g(\xi)\,\mathrm{d}\mu(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,\widehat{g}(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Demostración. Usamos el teorema de Tonelli para calcular la siguiente integral:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^2} \left|g(\xi)f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\right|\,\mathrm{d}(\mu\times\mu)(x,\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |g(\xi)|\,|f(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\mu(\xi) \\
&= \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |g(\xi)|\,\mathrm{d}\mu(\xi) \right) \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) \right) = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty.
\end{aligned}$$

Ahora podemos considerar las integrales similares sin el valor absoluto y usar el teorema de Fubini para cambiar el orden de las integrales:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\, g(\xi)\,\mathrm{d}\mu(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}} g(\xi) \left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\xi \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int\limits_{\mathbb{R}} g(\xi)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\,\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \square
\end{aligned}$$