Transformada de Fourier de funciones integrables

Objetivos. Estudiar propiedades básicas de la transformada de Fourier de funciones integrables.

En estos apuntes suponemos que $n \in \{1, 2, \ldots\}$ y μ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1 (la transformada de Fourier de una función integrable)**.** Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Denotemos por $\mathcal{F}f$ o por $\widehat{f}$ a la función $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definida mediante la siguiente regla:

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi\cdot x} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Proposición 2 (la transformada de Fourier de una función integrable es acotada)**.** *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\mathcal{F}f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Más aún, para cada ξ en $\mathbb{R}^n$,*

$$|\widehat{f}(\xi)| \leqslant \|f\|_1.$$

Demostración.

$$|\widehat{f}(\xi)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi\cdot x} f(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) = \|f\|_1.$$ □

Lema 3. *Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $L > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,L)} |f|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon,$$

donde $B(0, L) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| < L\}$.

Demostración. Pongamos $g_k = f 1_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,k)}$. Entonces la sucesión $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tiende a la función constante cero de manera puntual. Además $|g_k| \leqslant |f|$ para cada k, y la función $|f|$ es integrable. Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |g_k|\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Encontramos k tal que $\int_{\mathbb{R}^n} |g_k|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$, esto es,

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,k)} |f|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon,$$

ponemos $L = k$ y obtenemos el resultado requerido. □

Lema 4. *Para cada x en $\mathbb{R}$,*

$$|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - 1| = 2\left|\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right|.$$

Demostración. Factorizamos $e^{ix/2}$:

$$e^{ix} - 1 = e^{ix/2}\left(e^{ix/2} - e^{-ix/2}\right) = e^{ix/2}\left(2\,i\,\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right).$$

Sacando el valor absoluto obtenemos el resultado. □

Lema 5. *Para cada x en $\mathbb{R}$,*

$$|\,e^{ix} - 1| \leqslant |x|.$$

Demostración. Sale del Lema 4 aplicando la desigualdad $|\operatorname{sen}\alpha| \leqslant |\alpha|$ con $\alpha = x/2$. □

Proposición 6. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces la función $\widehat{f}$ es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Tenemos que encontrar $\delta > 0$ tal que para cada cualesquiera $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, si $|\xi - \eta| \leqslant \delta$, entonces $|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| \leqslant \varepsilon$. Pongamos $h = \xi - \eta$. Notamos que

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-2\pi i\, h\cdot x} - 1\right|\, |f(x)|\, d\mu(x).$$

Para cualquier $L > 0$, la última integral se puede dividir en dos partes de la siguiente manera:

$$\int_{B(0,L)} \left|e^{-2\pi i\, h\cdot x} - 1\right|\, |f(x)|\, d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,L)} \left|e^{-2\pi i\, h\cdot x} - 1\right|\, |f(x)|\, d\mu(x).$$

En la primera integral acotamos $|\,e^{-2\pi i\, h\cdot x}\,|$ por 2. Elegimos L como en el Lema 3, con $\varepsilon/4$ en vez de ε. En la segunda integral acotamos $|\,e^{-2\pi i\, h\cdot x}\,|$ usando el Lema 5. Obtenemos

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| \leqslant |h|\, 2\pi L \|f\|_1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pongamos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2(2\pi L\|f\|_1 + 1)}$. Entonces para $|h| \leqslant \delta$ se obtiene $|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| \leqslant \varepsilon$. □

Proposición 7 (la fórmula de reciprocidad de Fourier)**.** *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\, g(\xi)\, d\mu(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \widehat{g}(x)\, d\mu(x).$$

Demostración. Usamos el teorema de Fubini para cambiar el orden de las integrales:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\, g(\xi)\, d\mu(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} g(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i\, \xi x}\, dx\right) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}} g(\xi)\, e^{-2\pi i\, \xi x}\, d\xi\right) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Para justificar la aplicación del teorema de Fubini, notamos que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |g(\xi) f(x)\, e^{-2\pi i\, \xi x}\,|\, dx\, d\xi = \|f\|_1 \|g\|_1.$$ □