Transformada de Fourier de la función gaussiana

Proposición 1 (sobre la paridad de la transformada de Fourier)**.** *Sea f una función integrable y par: $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f(-x) = f(x)$ para casi todo x en $\mathbb{R}$. Entonces la función $\widehat{f}$ también es par.*

Demostración.

$$\widehat{f}(-\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,x(-\xi)} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}(-x)\xi}$$

hacemos el cambio de variable $u = -x$ y usamos la paridad de f:

$$= \int_{\mathbb{R}} f(-u)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,u\xi} = \int_{\mathbb{R}} f(u)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,u\xi} = \widehat{f}(\xi). \qquad \square$$

Proposición 2 (sobre la transformada de Fourier de la función dilatada)**.** *Sea $f \in L^(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Pongamos*

$$g(x) := f(\lambda x).$$

Entonces para cada ξ en $\mathbb{R}$,

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\lambda}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).$$

Demostración. Aplicamos las definiciones y el cambio de variable $u = \lambda x$:

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}\,dx = \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} f(u)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,u(\xi/\lambda)}\,du = \frac{1}{\lambda}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right). \qquad \square$$

Lema 3 (integral de Gauss)**.**

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}. \tag{1}$$

Demostración. Denotemos la integral por J, consideramos J^2 y escribimos J^2 como una integral doble usando el teorema de Tonelli:

$$J^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2}\,dy\right) = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Pasamos a las coordendas polares ($x = r\cos\varphi$, $y = r\operatorname{sen}\varphi$):

$$J^2 = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-r^2}\,r\,d\varphi\,dr = \pi\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r^2}\,2r\,dr = \pi\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt = \pi. \qquad \square$$

Corolario 4.

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\,dx = 1. \tag{2}$$

Demostración. Se obtiene de (1) usando el cambio de variable $t = \sqrt{\pi}x$. $\square$

La transformada de Fourier de la función gaussiana

Proposición 5 (la transformada de Fourier de la función gaussiana)**.** *Definimos f en $\mathbb{R}$ mediante la regla*

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\pi x^2}.$$

Entonces $\widehat{f} = f$.

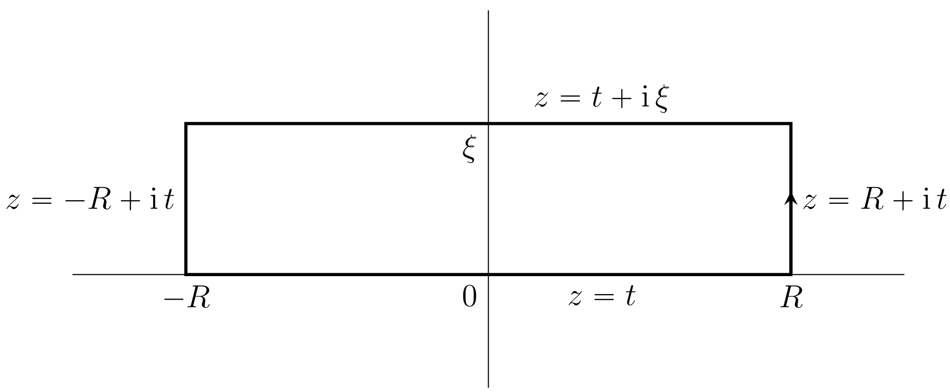
Demostración basada en análisis complejo. La función f es par, por eso su transformada de Fourier también es par, y es suficiente calcular $\widehat{f}(\xi)$ para $\xi \geqslant 0$. Para $\xi = 0$, por la fórmula (2), tenemos $\widehat{f}(0) = 1$. Para $\xi > 0$, tenemos que calcular la integral

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\, \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\, x\xi}\, dx.$$

Denotemos por F a la función original extendida al dominio $\mathbb{C}$:

$$F(z) \coloneqq \mathrm{e}^{-\pi z^2} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Esta función es entera (es decir, holomorfa en $\mathbb{C}$), y por el teorema integral de Cauchy sus integrales sobre todos los contornos cerrados son cero. Para cualquier $R > 0$ consideremos el contorno rectangular Γ_R que une los puntos complejos $-R$, R, $R+\mathrm{i}\,\xi$, $-R+\mathrm{i}\,\xi$ (elegimos la orientación positiva, contra reloj). Parametrizamos cada lado como está indicado en el dibujo:



Entonces $\int_{\Gamma_R} F(z)\, dz = 0$, esto es,

$$\int_{-R}^{R} F(t)\, dt + \int_0^{\xi} F(R + \mathrm{i}\,t)\, dt + \int_R^{-R} F(t + \mathrm{i}\,\xi)\, dt + \int_{\xi}^{0} F(-R + \mathrm{i}\,t)\, dt = 0. \tag{3}$$

1. Cuando R tiende a $+\infty$, la primera integral tiende a la integral de Gauss, es decir, a $\sqrt{\pi}$.

2. Acotamos la segunda integral:

$$\left|\int_0^{\xi} F(R + \mathrm{i}\,t)\, dt\right| \leqslant \int_0^{\xi} \left|\mathrm{e}^{-\pi R^2 - 2\pi\,\mathrm{i}\, tR + \pi R t^2}\right| dt = \mathrm{e}^{-\pi R^2} \int_0^{\xi} \mathrm{e}^{\pi R t^2}\, dt \leqslant \xi\, \mathrm{e}^{\pi R \xi^2}\, \mathrm{e}^{-\pi R^2}.$$

Para ξ fijo y $R \to +\infty$, esta expresión tiende a 0. De manera similar, la cuarta integral tiende a cero cuando $R \to +\infty$.

3. La tercera integral se puede escribir como

$$\int_{R}^{-R} F(t + \mathrm{i}\,\xi)\,dt = -\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-\pi t^2 - 2\pi\,\mathrm{i}\,t\xi + \pi\xi^2}\;dt = -\,\mathrm{e}^{\pi\xi^2}\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-\pi t^2 - 2\pi\,\mathrm{i}\,t\xi}\;dt.$$

Cuando R tiende a $+\infty$, esta expresión tiende a $\mathrm{e}^{-\pi\xi^2}\,\widehat{f}(\xi)$. Pasamos al límite en (3):

$$1 + 0 - \mathrm{e}^{\pi\xi^2}\,\widehat{f}(\xi) + 0 = 0.$$

Despejando $\widehat{f}(\xi)$ obtenemos

$$\widehat{f}(\xi) = \mathrm{e}^{-\pi\xi^2}$$

para $\xi > 0$. Usando la paridad de $\widehat{f}$ y el hecho que $(-\xi)^2 = \xi^2$, concluimos que la misma fórmula es válida para $\xi < 0$. $\square$

Demostración basada en la derivación respecto al parámetro. Denotemos $\widehat{f}$ por g. Notamos que la función $x \mapsto (-2\pi\,\mathrm{i}\,x)f(x)$ es integrable, por eso en la siguiente fórmula podemos derivar respecto a ξ dentro de la integral:

$$g(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\;f(x)\,dx,$$

y obtenemos que

$$g'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (-2\pi\,\mathrm{i}\,x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\;f(x)\,dx.$$

Notamos que $f'(x) = -2\pi x f(x)$, así que

$$g'(\xi) = \mathrm{i}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\;f'(x)\,dx = \mathrm{i}\,\widehat{f'}(\xi).$$

La función f' es integrable, y se sabe que $\widehat{f'}(\xi) = 2\pi\,\mathrm{i}\,\xi\widehat{f}$. Luego

$$g'(\xi) = \mathrm{i}(2\pi\,\mathrm{i}\,\xi)\widehat{f}(\xi) = -2\pi\xi g(\xi).$$

Además, por (2), $g(\xi) = 1$. Consideramos la siguiente ecuación diferencial con una condición inicial:

$$g'(\xi) = -2\pi\xi g(\xi), \qquad g(0) = 1.$$

Se puede aplicar el teorema de Picard y concluir que este problema tiene una única solución. La solución se adivina fácilmente: $g(\xi) = \mathrm{e}^{-\pi\xi^2}$. $\square$

La transformada de Fourier y el núcleo de calor

Corolario 6 (la transformada de Fourier y el núcleo de calor)**.** *Para cada $t > 0$, pongamos*

$$(H_t)(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Entonces

$$H_t(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-4\pi^2 t \xi^2}\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}\, d\xi. \tag{4}$$

Demostración. Sea f la función gaussiana de la Proposición 5, y sea

$$G_t(\xi) = \mathrm{e}^{-4\pi^2 t \xi^2}.$$

Entonces

$$G_t(\xi) = f(\sqrt{4\pi t}\,\xi).$$

Aplicamos la Proposición 2 con $\lambda = \sqrt{4\pi t}$ (intercambiando los papeles de x y ξ):

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\, \mathrm{e}^{-4\pi^2 t \xi^2}\, d\xi = \widehat{G_t}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \widehat{f}\left(\frac{x}{\sqrt{4\pi t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Cambiando ξ por $-\xi$ obtenemos (4). $\square$