Transformada de Fourier y transformadas simples de la función

En este tema suponemos que $f \in L^1(\mathbb{R})$. Denotamos por $\widehat{f}$ o por $\mathcal{F}(f)$ la transformada de Fourier de f, definida como la función $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que actúa mediante la regla

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,2\pi\xi x}\, f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \qquad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Proposición 1 (la transformada de Fourier es lineal)**.** *Sean $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces,*

$$\mathcal{F}(f_1 + f_2) = \mathcal{F}(f_1) + \mathcal{F}(f_2), \qquad \mathcal{F}(\lambda f_1) = \lambda \mathcal{F}(f_1).$$

Demostración. Sale de la propiedad lineal de la integral. □

Proposición 2 (la transformada de Fourier y los desplazamientos de la función)**.** *Sean $f \in L^1(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$. Definimos $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ como $g(x) \coloneqq f(x - s)$. Entonces,*

$$\widehat{g}(\xi) = \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,2\pi\xi s}\, \widehat{f}(\xi).$$

Demostración. En la integral hacemos el cambio de variable $y = x - s$, luego aplicamos la propiedad principal de la función exponencial y la propiedad homogénea de la integral:

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-s)\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,2\pi\xi x}\,\mathrm{d}\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,2\pi\xi(y+s)}\,\mathrm{d}\mu(y)\\ &= \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,2\pi\xi s} \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,2\pi\xi y}\,\mathrm{d}\mu(y) = \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,2\pi\xi s}\,\widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$ □

Proposición 3 (la transformada de Fourier de la función reflejada)**.** *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Definimos $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ como $g(x) \coloneqq f(-x)$. Entonces,*

$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(-\xi) \qquad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Demostración. En la integral hacemos el cambio de variable $y = -x$:

$$\widehat{g}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(-x)\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,2\pi\xi x}\,\mathrm{d}\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,2\pi(-\xi)y}\,\mathrm{d}\mu(y) = \widehat{f}(-\xi).$$ □

Corolario 4. *Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ una función par:*

$$f(-x) = f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Entonces, $\widehat{f}$ también es par.

Demostración. Consideramos $g(x) \coloneqq f(-x)$. Por la proposición anterior, para cada ξ en $\mathbb{R}$ tenemos que $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$. Por otro lado, como $g = f$, $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$. $\square$

Corolario 5. *Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ una función impar:*

$$f(-x) = -f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Entonces, $\widehat{f}$ también es impar.

Proposición 6 (la transformada de Fouriere de la función dilatada)**.** *Sean $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\lambda > 0$. Definimos $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ como $g(x) = f(x/\lambda)$. Entonces,*

$$\widehat{g}(\xi) = \lambda \widehat{f}(\lambda\xi).$$

Demostración. En la integral hacemos el cambio de variable $y = x/\lambda$:

$$\widehat{g}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi\xi x}\, \mathrm{d}\mu(x) = \lambda \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi\lambda\xi y}\, \mathrm{d}\mu(y) = \lambda\widehat{f}(\xi). \qquad \square$$

Proposición 7 (la transformada de Fourier y la modulación de la función)**.** *Sean $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\eta \in \mathbb{R}$,*

$$g(x) \coloneqq \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi\eta x} f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Entonces,

$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi - \eta) \qquad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Demostración.

$$\widehat{g}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi(\xi-\eta)x} f(x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \widehat{f}(\xi - \eta). \qquad \square$$

Proposición 8 (la transformada de Fourier de la función conjugada)**.** *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pongamos $g \coloneqq \overline{f}$. Entonces,*

$$\widehat{g}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)} \qquad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Demostración.

$$\widehat{g}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi\xi x}\, \overline{f(x)}\, \mathrm{d}\mu(x) = \overline{\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi(-\xi)x}\, \mathrm{d}\mu(x)} = \overline{\widehat{f}(-\xi)}. \qquad \square$$

Proposición 9 (la transformada de Fourier de la parte real y de la parte imaginaria de una función)**.** *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pongamos $u \coloneqq \mathrm{Re}(f)$, $v \coloneqq \mathrm{Im}(f)$. Entonces,*

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{2}\big(\widehat{f}(\xi) + \overline{\widehat{f}(-\xi)}\big), \qquad \widehat{v}(\xi) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\big(\widehat{f}(\xi) - \overline{\widehat{f}(-\xi)}\big).$$

Demostración. Expresamos u y v a través de f y $\overline{f}$:

$$u = \frac{1}{2}(f + \overline{f}), \qquad v = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}(f - \overline{f}).$$

Aplicamos la Proposición 8 y obtenemos el resultado. □

Corolario 10 (la transformada de Fourier de una función real)**.** *Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ tal que $f \geq 0$ c.t.p. Entonces,*

$$\widehat{f}(-\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)} \qquad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Los resultados de este tema se pueden resumir en la siguiente tabla.

parámetro	$g(x)$	$\widehat{g}(\xi)$
$s \in \mathbb{R}$	$f(x-s)$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi s\xi}\,\widehat{f}(\xi)$
	$f(-x)$	$\widehat{f}(-\xi)$
$\lambda > 0$	$f(x/\lambda)$	$\lambda\widehat{f}(\lambda\xi)$
$\eta \in \mathbb{R}$	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi\eta x}\,f(x)$	$\widehat{f}(\xi-\eta)$
	$\overline{f(x)}$	$\overline{\widehat{f}(-\xi)}$