Series de Fourier en L^2

Objetivos. Mostrar que las funciones básicas de Fourier forman una base ortogonal del espacio $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Repasar algunas propiedades de base ortonormal, para este espacio de Hilbert particular.

Requisitos. Definición del espacio $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, bases ortonormales en espacios de Hilbert, propiedad inyectiva de los coeficientes de Fourier: si $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y $\widehat{f} = 0$, entonces $f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} 0$.

Recordamos que el espacio $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ está dotado del producto interno

$$\langle f, g\rangle_{L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})} := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x.$$

En este tema escribiremos brevemente $\langle f, g\rangle$ y $\|f\|$ en vez de $\langle f, g\rangle_{L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})}$ y $\|f\|_{L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})}$.

Para cada k en $\mathbb{Z}$, denotamos por φ_k a la k-ésima función básica de Fourier,

$$\varphi_k(x) := \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}.$$

La sucesión $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal en $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Los coeficientes de Fourier de una función f se pueden escribir como

$$\widehat{f}_k = \langle f, \varphi_k\rangle.$$

Ya sabemos que si $f \in L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ (o, más general, si $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$) y $\widehat{f}_k = 0$ para cada k, entonces f se anula casi en todas partes. Esto significa que la sucesión $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tiene propiedad total, y de aquí por la teoría general de espacios de Hilbert se deduce que $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal. Vamos a explicar estos razonamientos para nuestra situación particular.

Proposición 1 (sobre las normas de los polinomios trigonométricos)**.** *Sean $a_k \in \mathbb{C}$, $-n \le k \le n$. Definimos $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,*

$$P := \sum_{k=-n}^{n} a_k\varphi_k.$$

Entonces, $P \in L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y

$$\|P\|^2 = \sum_{k=-n}^{n} |a_k|^2.$$

Demostración. La fórmula para la norma se sigue de la ortonormalidad de la sucesión $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. $\square$

Proposición 2 (Riesz–Fischer)**.** *Sea $a \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Entonces, existe una única función f en $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f}_k = a_k$ para cada k en $\mathbb{Z}$.*

Demostración. Sea

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k \, \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} .$$

La ortonormalidad de la sucesión $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ implica que para $n > m$

$$\|T_n - T_m\|_2 = \sum_{m+1\le|k|\le n} |a_k|^2,$$

y la sucesión $(T_n)_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy. Como el espacio $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ es completo, existe f en $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que $T_n \to f$ en $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Consideramos los coeficientes de Fourier de f:

$$\widehat{f}_k = \langle f, \varphi_k\rangle = \langle f - T_n, \varphi_k\rangle + \langle T_n, \varphi_k\rangle.$$

Si $n \ge k$, entonces el último sumando es a_k. Luego

$$|\widehat{f}_k - a_k| = |\langle f - T_n, \varphi_k\rangle| \le \|f - T_n\|.$$

Pasando al límite cuando $n \to \infty$ concluimos que $\widehat{f}_k = a_k$. □

Dada f en $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, para cada n en $\mathbb{Z}$ denotemos por $S_n f$ a la n-ésima suma parcial de Fourier:

$$S_n f \coloneqq \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}_k \varphi_k.$$

Demostremos que las sumas parciales $S_n f$ aproximan f de mejor manera, en el sentido de la norma $\|\cdot\|_{2,2\pi}$.

Proposición 3. *Sea $f \in L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces, para cualquier g de la forma*

$$g(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k \, \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x},$$

se tiene que

$$\|f - g\|^2 \ge \|f - S_n f\|^2.$$

La última expresión se puede escribir como

$$\|f - S_n f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}_k|^2.$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\|f-g\|^2 &= \langle f-g, f-g\rangle = \|f\|^2 - \langle f,g\rangle - \langle g,f\rangle + \|g\|^2 \\
&= \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^{n}\left(\overline{\widehat{f}_k} a_k + \widehat{f}_k \overline{a_k} - |a_k|^2\right) \\
&= \sum_{k=-n}^{n} |a_k - \widehat{f}_k|^2 + \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}_k|^2.
\end{aligned}
$$

Si $g = S_n f$, entonces $a_k = \widehat{f}_k$ y la primera suma desaparece. □

Proposición 4. *Sea* $f \in L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. *Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n f\| = 0.$$

Demostración. De la proposición anterior obtenemos la desigualdad de Bessel

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}_k|^2 \le \|f\|^2.$$

Mostremos que la sucesión $(S_n f)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. En efecto, si $m < n$, entonces

$$\|S_n f - S - mf\|^2 = \sum_{m<|k|\le n} |\widehat{f}_k|^2.$$

El espacio $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ es completo, por eso existe una función $g \in L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n f - g\| = 0.$$

Nos falta demostrar que $f = g$. Consideramos los coeficientes de Fourier de g:

$$\widehat{g}_k = \langle g, \varphi_k\rangle = \langle g - S_n f, \varphi_k\rangle + \langle S_n f, \varphi_k\rangle.$$

Si $n > k$, entonces el último sumando es $\widehat{f}_k$, y

$$\widehat{g}_k - \widehat{f}_k = \langle g - S_n f, \varphi_k\rangle.$$

Por la desigualdad de Cauchy–Schwarz obtenemos

$$|\widehat{g}_k - \widehat{f}_k| \le \|g - S_n f\|.$$

Pasando al límite cuando n tiende a infinito concluimos que

$$\widehat{g}_k = \widehat{f}_k.$$

Por la propiedad inyectiva de los coeficientes de Fourier, concluimos que $g \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} f$. Por lo tanto, $S_n f \to f$ en $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. □

Proposición 5 (identidad de Parseval)**.** *Sea* $f \in L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$*. Entonces,*

$$\|f\| = \|\widehat{f}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})},$$

esto es,

$$\|f\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}_k|^2.$$

Demostración. En la proposición anterior ya demostramos que $S_n f \to f$ en el espacio $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Esto implica la convergencia de las normas:

$$\|f\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|S_n f\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}_k|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}_k|^2. \qquad \square$$

Ejercicio 6 (la identidad de Parseval para los productos internos)**.** Sean $f, g \in L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Demostrar que

$$\langle f, g\rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}.$$

Ejercicio 7. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la función 2π-periódica tal que

$$\forall x \in [-\pi, \pi[\qquad f(x) = x.$$

Calcular $\widehat{f}$ y $\|f\|_{L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})}$. Usando la identidad de Parseval calcular la suma de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Ejercicio 8. Verificar que la igualdad de Parseval se cumple para el nucleo de Poisson.