Coeficientes de Fourier
y transformadas simples de la función
(un tema de Análisis Armónico)

Egor Maximenko,

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

7 de octubre de 2021

Objetivos

Dada una función f de clase $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, consideramos las funciones que se obtienen de f por medio de las siguientes transformaciones simples:

- $g(x) := f(x - s)$,
- $g(x) := f(-x)$,
- $g(x) := \overline{f(x)}$,
- $g(x) := \operatorname{Re}(f(x))$,
- $g(x) := \operatorname{Im}(f(x))$,
- $g(x) := e^{p\,i\,x} f(x)$,
- $g(x) := f'(x)$.

Objetivos

Dada una función f de clase $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, consideramos las funciones que se obtienen de f por medio de las siguientes transformaciones simples:

- $g(x) := f(x - s)$,
- $g(x) := f(-x)$,
- $g(x) := \overline{f(x)}$,
- $g(x) := \operatorname{Re}(f(x))$,
- $g(x) := \operatorname{Im}(f(x))$,
- $g(x) := \mathrm{e}^{p\,\mathrm{i}\,x} f(x)$,
- $g(x) := f'(x)$.

En cada uno de estos casos, vamos a expresar los coeficientes de Fourier de g en términos de los coeficientes de Fourier de f.

Repaso: las funciones medibles 2π-periódicas y la seminorma $\mathcal{N}_{p,2\pi\text{-per}}$

$\mathcal{F} :=$ la σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y sea μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Repaso: las funciones medibles 2π-periódicas y la seminorma $\mathcal{N}_{p,2\pi\text{-per}}$

$\mathcal{F} :=$ la σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y sea μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

$$\mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) := \{ f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \colon \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + 2\pi) = f(x) \}.$$

Repaso: las funciones medibles 2π-periódicas y la seminorma $\mathcal{N}_{p,2\pi\text{-per}}$

$\mathcal{F} :=$ la σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y sea μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

$$\mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R},\mathcal{F},\mathbb{C}) := \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{R},\mathcal{F},\mathbb{C}): \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+2\pi) = f(x)\}.$$

Sea $1 \le p < +\infty$. Definimos $\mathcal{N}_{p,2\pi\text{-per}} : \mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R},\mathcal{F},\mathbb{C}) \to [0,+\infty]$,

$$\mathcal{N}_{p,2\pi\text{-per}}(f) :=$$

Repaso: las funciones medibles 2π-periódicas y la seminorma $\mathcal{N}_{p,2\pi\text{-per}}$

$\mathcal{F} :=$ la σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y sea μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

$$\mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R},\mathcal{F},\mathbb{C}) := \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{R},\mathcal{F},\mathbb{C})\colon \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+2\pi) = f(x)\}.$$

Sea $1 \le p < +\infty$. Definimos $\mathcal{N}_{p,2\pi\text{-per}}\colon \mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R},\mathcal{F},\mathbb{C}) \to [0,+\infty]$,

$$\mathcal{N}_{p,2\pi\text{-per}}(f) := \left(\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi[} |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}.$$

Repaso: las funciones medibles 2π-periódicas y la seminorma $\mathcal{N}_{p,2\pi\text{-per}}$

$\mathcal{F} :=$ la σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y sea μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

$$\mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R},\mathcal{F},\mathbb{C}) := \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{R},\mathcal{F},\mathbb{C})\colon \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+2\pi) = f(x)\}.$$

Sea $1 \le p < +\infty$. Definimos $\mathcal{N}_{p,2\pi\text{-per}}\colon \mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R},\mathcal{F},\mathbb{C}) \to [0,+\infty]$,

$$\mathcal{N}_{p,2\pi\text{-per}}(f) := \left(\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi[} |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}.$$

Proposición

$\mathcal{N}_{p,2\pi\text{-per}}$ es una seminorma extendida.

Repaso: las funciones 2π-periódicas que se anulan c.t.p.

$$\mathcal{Z}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) \coloneqq \left\{ f \in \mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \colon \quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_{\mathbb{R}} \right\}.$$

Repaso: las funciones 2π-periódicas que se anulan c.t.p.

$$\mathcal{Z}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \colon \quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_{\mathbb{R}} \right\}.$$

Proposición

Sea $1 \le p < +\infty$. Entonces

$$\mathcal{Z}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \colon \quad \mathcal{N}_{p,2\pi\text{-per}}(f) = 0 \right\}.$$

Repaso: los espacios $\mathcal{L}^p_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y $L^p_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{L}^p_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \Big\{ f \in \mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \colon \quad \mathcal{N}_{p,2\pi\text{-per}}(f) < +\infty \Big\}.$$

Repaso: los espacios $\mathcal{L}^p_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y $L^p_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{L}^p_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) : \quad \mathcal{N}_{p,2\pi\text{-per}}(f) < +\infty \right\}.$$

El espacio $L^p_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ se define como el espacio cociente

$$\mathcal{L}^p_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) / \mathcal{Z}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}).$$

Repaso: los espacios $\mathcal{L}^p_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y $L^p_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{L}^p_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \colon \quad \mathcal{N}_{p,2\pi\text{-per}}(f) < +\infty \right\}.$$

El espacio $L^p_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ se define como el espacio cociente

$$\mathcal{L}^p_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) / \mathcal{Z}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}).$$

Las operaciones lineales y la norma se definen a través de representantes (se demuestra que estas definiciones son consistentes).

Repaso: los espacios $\mathcal{L}^p_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y $L^p_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{L}^p_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) : \quad \mathcal{N}_{p,2\pi\text{-per}}(f) < +\infty \right\}.$$

El espacio $L^p_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ se define como el espacio cociente

$$\mathcal{L}^p_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) / \mathcal{Z}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}).$$

Las operaciones lineales y la norma se definen a través de representantes (se demuestra que estas definiciones son consistentes).

Proposición

$\mathcal{L}^p_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ es un espacio de Banach.

Comparación de $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ con $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$

Ejercicio. Demostrar que

$$L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) \subseteq L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}).$$

Comparación de $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ con $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$

Ejercicio. Demostrar que

$$L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) \subseteq L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}).$$

Ejercicio. Demostrar que

$$L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) \neq L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}).$$

Sobre las integrales de una función periódica

En este tema suponemos que $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.

En particular, los resultados se cumplen también para f en $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.

Sobre las integrales de una función periódica

En este tema suponemos que $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.
En particular, los resultados se cumplen también para f en $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.

Proposición (sobre las integrales de una función periódica)

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\int_{[\alpha,\alpha+2\pi[} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{[0,2\pi[} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración para $0 < \alpha < 2\pi$

$$\int_{[\alpha,\alpha+2\pi[} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{[\alpha,2\pi[} f \,\mathrm{d}\mu + \int_{[2\pi,\alpha+2\pi[} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Demostración para $0 < \alpha < 2\pi$

$$\int_{[\alpha,\alpha+2\pi[} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{[\alpha,2\pi[} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{[2\pi,\alpha+2\pi[} f \, \mathrm{d}\mu.$$

En la segunda integral hagamos el cambio de variable $y = x - 2\pi$.

Usamos la invarianza de μ bajo las traslaciones.

$$\int_{[2\pi,\alpha+2\pi[} f(x) \, \mathrm{d}\mu(x) =$$

Demostración para $0 < \alpha < 2\pi$

$$\int_{[\alpha,\alpha+2\pi[} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{[\alpha,2\pi[} f \,\mathrm{d}\mu + \int_{[2\pi,\alpha+2\pi[} f \,\mathrm{d}\mu.$$

En la segunda integral hagamos el cambio de variable $y = x - 2\pi$.

Usamos la invarianza de μ bajo las traslaciones.

$$\int_{[2\pi,\alpha+2\pi[} f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{[0,\alpha[} f(y + 2\pi) \,\mathrm{d}\mu(y) =$$

Demostración para $0 < \alpha < 2\pi$

$$\int_{[\alpha,\alpha+2\pi[} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{[\alpha,2\pi[} f \,\mathrm{d}\mu + \int_{[2\pi,\alpha+2\pi[} f \,\mathrm{d}\mu.$$

En la segunda integral hagamos el cambio de variable $y = x - 2\pi$.

Usamos la invarianza de μ bajo las traslaciones.

$$\int_{[2\pi,\alpha+2\pi[} f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{[0,\alpha[} f(y + 2\pi) \,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{[0,\alpha[} f(y) \,\mathrm{d}\mu(y).$$

Demostración para $0 < \alpha < 2\pi$

$$\int_{[\alpha,\alpha+2\pi[} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{[\alpha,2\pi[} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{[2\pi,\alpha+2\pi[} f \, \mathrm{d}\mu.$$

En la segunda integral hagamos el cambio de variable $y = x - 2\pi$.

Usamos la invarianza de μ bajo las traslaciones.

$$\int_{[2\pi,\alpha+2\pi[} f(x) \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_{[0,\alpha[} f(y + 2\pi) \, \mathrm{d}\mu(y) = \int_{[0,\alpha[} f(y) \, \mathrm{d}\mu(y).$$

Luego

$$\int_{[\alpha,\alpha+2\pi[} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{[\alpha,2\pi[} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{[0,\alpha[} f \, \mathrm{d}\mu =$$

Demostración para $0 < \alpha < 2\pi$

$$\int_{[\alpha,\alpha+2\pi[} f\,\mathrm{d}\mu = \int_{[\alpha,2\pi[} f\,\mathrm{d}\mu + \int_{[2\pi,\alpha+2\pi[} f\,\mathrm{d}\mu.$$

En la segunda integral hagamos el cambio de variable $y = x - 2\pi$.

Usamos la invarianza de μ bajo las traslaciones.

$$\int_{[2\pi,\alpha+2\pi[} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{[0,\alpha[} f(y+2\pi)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{[0,\alpha[} f(y)\,\mathrm{d}\mu(y).$$

Luego

$$\int_{[\alpha,\alpha+2\pi[} f\,\mathrm{d}\mu = \int_{[\alpha,2\pi[} f\,\mathrm{d}\mu + \int_{[0,\alpha[} f\,\mathrm{d}\mu = \int_{[0,2\pi[} f\,\mathrm{d}\mu.$$

Ejercicio. Demostrar la proposición anterior para α general.

Sugerencia. Escribir α como

$$\alpha = 2\pi m + \beta,$$

donde $m \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \beta < 2\pi$.

Repaso: las funciones básicas de Fourier

Para cada k en $\mathbb{Z}$, denotamos por φ_k a la k-ésima función básica de Fourier:

$$\varphi_k(x) := \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}\,.$$

Repaso: las funciones básicas de Fourier

Para cada k en $\mathbb{Z}$, denotamos por φ_k a la k-ésima función básica de Fourier:

$$\varphi_k(x) := \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}\,.$$

Proposición

Sea $k \in \mathbb{Z}$. Entonces φ_k es 2π-periódica.

Repaso: la definición de los coeficientes de Fourier

Repaso: la definición de los coeficientes de Fourier

Dada f en $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, para cada k en $\mathbb{Z}$ pongamos

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi[} f \, \overline{\varphi_k} \, \mathrm{d}\mu.$$

Repaso: la definición de los coeficientes de Fourier

Dada f en $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, para cada k en $\mathbb{Z}$ pongamos

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi[} f\, \overline{\varphi_k}\, \mathrm{d}\mu.$$

En una notación más elemental,

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\, \mathrm{d}x.$$

Los coeficientes de Fourier y los desplazamientos de la función

Proposición

Sean $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$. Definimos $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ como

$$g(x) := f(x - s).$$

Entonces para cada k en $\mathbb{Z}$,

$$\widehat{g}_k = \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\widehat{f}_k.$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-s)\, \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x} \,\mathrm{d}x$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x - s)\, \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\, \mathrm{d}x$$

hacemos el cambio de variable $y = x - s$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x - s)\, \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\, \mathrm{d}x$$

hacemos el cambio de variable $y = x - s$

$$=$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x - s)\, \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\; \mathrm{d}x$$

hacemos el cambio de variable $y = x - s$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-s}^{2\pi - s} f(y)\, \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}(y+s)}\; \mathrm{d}y$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-s)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{d}x$$

hacemos el cambio de variable $y = x - s$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}(y+s)}\,\mathrm{d}y \;=$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-s)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{d}x$$

hacemos el cambio de variable $y = x - s$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}(y+s)}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\mathrm{d}y$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-s)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{d}x$$

hacemos el cambio de variable $y = x - s$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}(y+s)}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\mathrm{d}y$$

$$=$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-s)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{d}x$$

hacemos el cambio de variable $y = x - s$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}(y+s)}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\mathrm{d}y$$

$$= \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{d}y$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-s)\, e^{-k\,i\,x}\, dx$$

hacemos el cambio de variable $y = x - s$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\, e^{-k\,i(y+s)}\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\, e^{-k\,i\,y}\, e^{-k\,i\,s}\, dy$$

$$= e^{-k\,i\,s}\, \frac{1}{2\pi} \int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\, e^{-k\,i\,y}\, dy =$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-s)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{d}x$$

hacemos el cambio de variable $y = x - s$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}(y+s)}\,\mathrm{d}y \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\mathrm{d}y \\
&= \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{d}y \;=\; \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-s)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{d}x$$

hacemos el cambio de variable $y = x - s$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}(y+s)}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\mathrm{d}y \\
&= \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{d}y \\
&=
\end{aligned}$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-s)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{d}x$$

hacemos el cambio de variable $y = x - s$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}(y+s)}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\mathrm{d}y\\
&= \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{d}y\\
&= \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\widehat{f}_k.
\end{aligned}$$

Los coeficientes de Fourier de la función reflejada

Proposición

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Definimos $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ como

$$g(x) := f(-x).$$

Entonces para cada k en $\mathbb{Z}$ se tiene

$$\widehat{g}_k = \widehat{f}_{-k}.$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(-x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{0} f(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ky}\,\mathrm{d}y.$$

Como la función debajo de la integral es 2π-periódica, podemos cambiar el intervalo de integración a $[0, 2\pi[$:

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\overline{\varphi_{-k}(y)}\,\mathrm{d}y = \widehat{f}_{-k}.$$

Los coeficientes de Fourier y modulación de la función

Proposición

Sean $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, $p \in \mathbb{Z}$,

$$g := \varphi_p f.$$

Entonces

$$\widehat{g}_k = \widehat{f}_{k-p}.$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{\varphi_k}\,\varphi_p f\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{\varphi_{k-p}} f\,\mathrm{d}\mu = \widehat{f}_{k-p}.$$

Los coeficientes de Fourier de la función conjugada

Proposición

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Pongamos

$$g := \overline{f}.$$

Entonces

$$\widehat{g}_k = \overline{\widehat{f}_{-k}}.$$

Demostración

$$\widehat{g}_k =$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(x)}\,\overline{\varphi_k(x)}\,\mathrm{d}x =$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(x)}\,\overline{\varphi_k(x)}\,\mathrm{d}x = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{\varphi_{-k}(x)}\,\mathrm{d}x} =$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(x)}\,\overline{\varphi_k(x)}\,\mathrm{d}x = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{\varphi_{-k}(x)}\,\mathrm{d}x} = \overline{\widehat{f}_{-k}}.$$

Los coeficientes de Fourier de la parte real de una función

Proposición

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Pongamos

$$u := \operatorname{Re}(f), \qquad v := \operatorname{Im}(f).$$

Entonces

$$\widehat{u}_k = \frac{1}{2}\left(\widehat{f}_k + \overline{\widehat{f}_{-k}}\right), \qquad \widehat{v}_k = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\left(\widehat{f}_k - \overline{\widehat{f}_{-k}}\right).$$

Los coeficientes de Fourier de la parte real de una función

Proposición

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Pongamos

$$u := \operatorname{Re}(f), \qquad v := \operatorname{Im}(f).$$

Entonces

$$\widehat{u}_k = \frac{1}{2}\left(\widehat{f}_k + \overline{\widehat{f}_{-k}}\right), \qquad \widehat{v}_k = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\left(\widehat{f}_k - \overline{\widehat{f}_{-k}}\right).$$

Idea:

$$u = \frac{f + \overline{f}}{2}, \qquad v = \frac{f - \overline{f}}{2\,\mathrm{i}}.$$

Los coeficientes de Fourier clásicos (con cos y sen)

Ejercicio. Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea k en $\mathbb{N}$. Expresar

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, \mathrm{d}x, \qquad b_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx) \, \mathrm{d}x,$$

en términos de $\widehat{f}$.

Expresar $\widehat{f}$ en términos de a_k y b_k.

Los coeficientes de Fourier de la derivada de una función

Proposición

Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que f es absolutamente continua en $[0, 2\pi]$.

Denotemos por g a la derivada de f:

$$g := f'.$$

Entonces para cada k en $\mathbb{Z}$,

$$\widehat{g}_k = k\,\mathrm{i}\,\widehat{f}_k.$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, kx}\, \mathrm{d}x.$$

$$=$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, kx}\, \mathrm{d}x.$$

Sabemos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, kx} \right) =$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x.$$

Sabemos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\right) = -\,k\,\mathrm{i}\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,.$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, kx} \,\mathrm{d}x.$$

Sabemos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, kx}\right) = -\, k\, \mathrm{i}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, kx}\,.$$

Aplicamos la integración por partes:

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x.$$

Sabemos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\right) = -\,k\,\mathrm{i}\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,.$$

Aplicamos la integración por partes:

$$\widehat{g}_k =$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, kx}\, \mathrm{d}x.$$

Sabemos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, kx} \right) = -\, k\, \mathrm{i}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, kx}\, .$$

Aplicamos la integración por partes:

$$\widehat{g}_k = \frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi} +$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x.$$

Sabemos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,kx}\right) = -\,k\,\mathrm{i}\;\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,kx}\,.$$

Aplicamos la integración por partes:

$$\widehat{g}_k = \frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi} + k\,\mathrm{i}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x.$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x.$$

Sabemos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\right) = -\,k\,\mathrm{i}\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,.$$

Aplicamos la integración por partes:

$$\widehat{g}_k = \frac{f(2\pi)-f(0)}{2\pi} + k\,\mathrm{i}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x.$$

Gracias a la periodicidad de f, tenemos $f(2\pi)-f(0)=0$.

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x.$$

Sabemos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,kx}\right) = -\,k\,\mathrm{i}\;\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,kx}\,.$$

Aplicamos la integración por partes:

$$\widehat{g}_k = \frac{f(2\pi)-f(0)}{2\pi} + k\,\mathrm{i}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x.$$

Gracias a la periodicidad de f, tenemos $f(2\pi)-f(0)=0$. Luego

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x.$$

Sabemos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\right) = -\,k\,\mathrm{i}\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,.$$

Aplicamos la integración por partes:

$$\widehat{g}_k = \frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi} + k\,\mathrm{i}\;\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x.$$

Gracias a la periodicidad de f, tenemos $f(2\pi) - f(0) = 0$. Luego

$$\widehat{g}_k = k\,\mathrm{i}\;\widehat{f}_k.$$

Los coeficientes de Fourier de la antiderivada de una función

Ejercicio. Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que

$$\int_0^{2\pi} f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Definimos $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$g(x) \coloneqq \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Demostrar que $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Calcular $\widehat{g}_k$ para cada k en $\mathbb{Z}$.

Resumen

$g(x)$	$\widehat{g}_k$
$f(x-s)$	
$f(-x)$	
$\overline{f(x)}$	
$e^{p\,i\,x} f(x),\ \ p \in \mathbb{Z}$	
$f'(x)$	

Resumen

$g(x)$	$\widehat{g}_k$
$f(x-s)$	$e^{-k\,i\,s}\,\widehat{f}_k$
$f(-x)$	
$\overline{f(x)}$	
$e^{p\,i\,x}\,f(x),\;\; p\in\mathbb{Z}$	
$f'(x)$	

Resumen

$g(x)$	$\widehat{g}_k$
$f(x-s)$	$e^{-kis}\,\widehat{f}_k$
$f(-x)$	$\widehat{f}_{-k}$
$\overline{f(x)}$	
$e^{pix} f(x),\;\; p \in \mathbb{Z}$	
$f'(x)$	

Resumen

$g(x)$	$\widehat{g}_k$
$f(x-s)$	$e^{-kis}\,\widehat{f}_k$
$f(-x)$	$\widehat{f}_{-k}$
$\overline{f(x)}$	$\overline{\widehat{f}_{-k}}$
$e^{pix} f(x),\ p \in \mathbb{Z}$	
$f'(x)$	

Resumen

$g(x)$	$\widehat{g}_k$
$f(x-s)$	$e^{-kis}\,\widehat{f}_k$
$f(-x)$	$\widehat{f}_{-k}$
$\overline{f(x)}$	$\overline{\widehat{f}_{-k}}$
$e^{pix}\,f(x),\ \ p\in\mathbb{Z}$	$\widehat{f}_{k-p}$
$f'(x)$	

Resumen

$g(x)$	$\widehat{g}_k$
$f(x-s)$	$e^{-k\,i\,s}\,\widehat{f}_k$
$f(-x)$	$\widehat{f}_{-k}$
$\overline{f(x)}$	$\overline{\widehat{f}_{-k}}$
$e^{p\,i\,x}\,f(x),\;\; p\in\mathbb{Z}$	$\widehat{f}_{k-p}$
$f'(x)$	$k\,i\,\widehat{f}_k$