Coeficientes de Fourier
y transformadas simples de la función

En este tema suponemos que $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. En particular, los resultados se cumplen también para f en $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Para cada k en $\mathbb{Z}$, denotamos por φ_k a la función

$$\varphi_k(x) \coloneqq \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}.$$

Lema 1 (sobre las integrales de una función periódica)**.** *Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demostración.

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2\pi}^{\alpha+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En la segunda integral hacemos el cambio de variable $y = x - 2\pi$. Como f es 2π-periódica, $f(y + 2\pi) = f(y)$. Luego

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \square$$

Proposición 2 (los coeficientes de Fourier y los desplazamientos de la función)**.** *Sean $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$. Definimos $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ como $g(x) \coloneqq f(x - s)$. Entonces*

$$\widehat{g}_k = \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\widehat{f}_k.$$

Demostración. En la integral hacemos el cambio de variable $y = x - s$, luego aplicamos la propiedad principal de la función exponencial, la propiedad homogénea de la integral y el Lema 1:

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-s)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}(y+s)}\,\mathrm{d}y$$

$$= \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\widehat{f}_k. \qquad \square$$

Proposición 3 (los coeficientes de Fourier de la función reflejada)**.** *Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Definimos $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ como $g(x) \coloneqq f(-x)$. Entonces*

$$\widehat{g}_k = \widehat{f}_{-k}.$$

Demostración.

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(-x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-2\pi}^{0} f(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ky}\,\mathrm{d}y.$$

Como la función debajo de la integral es 2π-periódica, podemos cambiar el intervalo de integración a $[0, 2\pi]$:

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(y)\overline{\varphi_{-k}(y)}\,\mathrm{d}y = \widehat{f}_{-k}. \qquad \square$$

Proposición 4 (los coeficientes de Fourier y modulación de la función)**.** *Sean* $f \in L^1_{2\pi\text{-}per}(\mathbb{R})$, $p \in \mathbb{Z}$, $g := \varphi_p f$. *Entonces*

$$\widehat{g}_k = \widehat{f}_{k-p}.$$

Demostración.

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \overline{\varphi_k}\;\varphi_p f\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \overline{\varphi_{k-p}} f\,\mathrm{d}\mu = \widehat{f}_{k-p}. \qquad \square$$

Proposición 5 (los coeficientes de Fourier de la función conjugada)**.** *Sea* $f \in L^1_{2\pi\text{-}per}(\mathbb{R})$. *Pongamos* $g := \overline{f}$. *Entonces*

$$\widehat{g}_k = \overline{\widehat{f}_{-k}}.$$

Demostración.

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \overline{f(x)}\,\overline{\varphi_k(x)}\,\mathrm{d}x = \overline{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,\overline{\varphi_{-k}(x)}\,\mathrm{d}x} = \overline{\widehat{f}_{-k}}. \qquad \square$$

Proposición 6 (los coeficientes de Fourier de la parte real y de la parte imaginaria de una función)**.** *Sea* $f \in L^1_{2\pi\text{-}per}(\mathbb{R})$. *Pongamos* $u := \mathrm{Re}(f)$, $v := \mathrm{Im}(f)$. *Entonces*

$$\widehat{u}_k = \frac{1}{2}\big(\widehat{f}_k + \overline{\widehat{f}_{-k}}\big), \qquad \widehat{v}_k = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\big(\widehat{f}_k - \overline{\widehat{f}_{-k}}\big).$$

Proposición 7 (los coeficientes de Fourier de la derivada de una función)**.** *Sea* $f \in C_{2\pi\text{-}per}(\mathbb{R})$ *tal que* f *es absolutamente continua en cada segmento finito de* $\mathbb{R}$. *Denotemos por* g *a la derivada de* f. *Entonces*

$$\widehat{g}_k = k\,\mathrm{i}\,\widehat{f}_k.$$

Demostración. Aplicamos la integración por partes:

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f'(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x = \frac{f(2\pi)-f(0)}{2\pi} + k\,\mathrm{i}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x = k\,\mathrm{i}\,\widehat{f}_k. \qquad \square$$