El núcleo de Fejér

Estos apuntes escribió Egor Maximenko con ayuda de Oscar García Hernández.

Objetivos. Deducir varias fórmulas equivalentes para el núcleo de Fejér $(\Phi_n)_{n=0}^{\infty}$.

Requisitos. El núcleo de Dirichlet, cambio de variable en sumas triangulares.

Aplicaciones. Luego demostraremos que la sucesión $(\Phi_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Dirac. En otra terminología, es un núcleo bueno. Usando esta sucesión y la convolución períodica se puede demostrar el teorema de Weierstrass sobre la aproximación uniforme de funciones continuas periódicas por polinomios trigonométricos.

Monomios y polinomios trigonométricos (repaso breve)

1. Monomios trigonométricos. Para cada k en $\mathbb{Z}$, denotamos por φ_k a la función $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida mediante la fórmula

$$\varphi_k(\theta) := \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\theta}. \tag{1}$$

2. Polinomios trigonométricos (repaso breve). Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se llama *polinomio trigonométrico* o *polinomio de Fourier* si f es una combinación lineal finita de algunas de las funciones φ_k, $k \in \mathbb{Z}$; en otras palabras, si existe un subconjunto finito A de $\mathbb{Z}$ y una familia $(c_k)_{k\in A}$ de números complejos tales que

$$f = \sum_{k\in A} c_k \varphi_k. \tag{2}$$

En otras palabras, f es un polinomio trigonométrico si existe un número $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ y algunos números c_k, $k \in \{-n, \ldots, n\}$, tales que

$$f = \sum_{k=-n}^{n} c_k \varphi_k. \tag{3}$$

Obviamente (3) es un caso particular de (2), con $A = \{-n, \ldots, n\}$. Por otro lado, para pasar de (2) a (3), es suficiente poner $n := \max\{|k| \colon\ k \in A\}$ y $c_k := 0$ para k en $\{-n, \ldots, n\}\setminus A$.

3. Período positivo mínimio del monomio trigonométrico (repaso breve). La función φ_0 es una función constante, por eso cualquier número real sirve como su período, y el período positivo mínimio no está definido. Si $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, entonces para cada θ en $\mathbb{R}$

$$\varphi_k\left(\theta + \frac{2\pi}{|k|}\right) = \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\theta + 2\pi\,\mathrm{sgn}(k)} = \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\theta} = \varphi_k(\theta),$$

así que $\frac{2\pi}{k}$ es un período positivo de φ_k. Por otro lado, la función φ_k toma el valor 1 solamente en los puntos de la forma $\frac{2\pi j}{|k|}$, $j \in \mathbb{Z}$, por eso es fácil demostrar que el período positivo *mínimo* de φ_k es $\frac{2\pi}{|k|}$. Como 2π es un múltiplo de $\frac{2\pi}{|k|}$, la función φ_k es 2π-periódica.

4. Proposición (periodicidad de polinomios trigonométricos). Cada una de las funciones φ_k es 2π-periódica, por eso cualquier polinomio trigonométrico también es una función 2π-periódica.

5. Otras formas de trabajar con funciones periódicas. La periodicidad permite considerar polinomios trigonomericos como funciones definidas en el grupo cociente $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ o en la circunferencia unitaria $\mathbb{T}$, pero en estos apuntes no trabajamos así. Algunos autores prefieren trabajar con funciones $x \mapsto \mathrm{e}^{2\pi k\,\mathrm{i}\,x}$. Sus combinaciones lineales son 1-periódicas y se pueden considerar como funciones definidas en el grupo cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

El núcleo de Dirichlet (repaso breve)

6. Varias definiciones equivalentes del núcleo de Dirichlet (repaso breve). Para cada n en $\{0, 1, 2, \ldots\}$, el núcleo de Dirichlet D_n es una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula:

$$D_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\theta}. \tag{4}$$

Otra fórmula equivalente:

$$D_n(\theta) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta). \tag{5}$$

De la forma (4) es obvio que D_n es un polinomio trigonométrico; es la suma de los monomios trigonométricos con índices de $-n$ a n:

$$D_n = \sum_{k=-n}^{n} \varphi_k. \tag{6}$$

El núcleo de Dirichlet se puede calcular en forma cerrada (sin $\sum$):

$$D_n(\theta) = \frac{\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\theta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}. \tag{7}$$

Del punto de vista elemental, el lado derecho de (7) no está definido en los puntos de la forma $\theta = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Sin embargo, en cada uno de estos puntos el lado derecho de (7) tiene límite $2n + 1$ y se puede definir por continuidad. Del punto de vista de análisis complejo, D_n es una función analítica, los múltiplos de 2π son sus singularidades evitables, y el valor D_n en estos puntos se define de manera automática.

7. Propiedades elementales del núcleo de Dirichlet (repaso breve). El núcleo de Dirichlet es una función 2π-periódica:

$$D_n(\theta + 2m\pi) = D_n(\theta) \qquad (\theta \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{Z}). \tag{8}$$

El núcleo de Dirichlet es una función par:

$$D_n(-\theta) = D_n(\theta) \qquad (\theta \in \mathbb{R}). \tag{9}$$

El núcleo de Dirichlet tiene valor $2n+1$ en los múltiplos enteros de 2π, esto es, en los puntos del conjunto $2\pi\mathbb{Z}$:

$$D_n(2m\pi) = 2n+1 \qquad (m \in \mathbb{Z}). \tag{10}$$

El número $2n+1$ es el máximo valur absoluto de D_n, esto es, el valor absoluto de D_n se acota por $2n+1$:

$$|D_n(\theta)| \leqslant 2n+1 \qquad (\theta \in \mathbb{R}). \tag{11}$$

Si θ no es un múltiplo de 2π, entonces $D_n(\theta)$ es *estrictamente* menor que $2n+1$:

$$D_n(\theta) < 2n+1 \qquad (\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}). \tag{12}$$

Esto significa que D_n toma el valor $2n+1$ *solamente* en los múltiplos de 2π. Por consecuencia, 2π es el *período positivo mínimo* de la función D_n.

Definición del núcleo de Fejér y varias fórmulas equivalentes

8. Definición del núcleo de Fejér a través del núcleo de Dirichlet.

$$\Phi_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(\theta). \tag{13}$$

9. Proposición (el núcleo de Fejér como un polinomio trigonométrico, en la forma compleja).

$$\Phi_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\theta}, \tag{14}$$

y también

$$\Phi_n(\theta) = \sum_{k=1-n}^{n-1}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\theta}. \tag{15}$$

Demostración. Usamos (13) y (4):

$$\Phi_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} D_j(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=-j}^{j}\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\theta}.$$

Para intercambiar las sumas, notamos que el sistema de desigualdades

$$0 \leqslant j \leqslant n-1, \qquad |k| \leqslant j,$$

es equivalente al sistema

$$|k| \leqslant n-1, \qquad |k| \leqslant j \leqslant n-1.$$

Por eso

$$\Phi_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=1-n}^{n-1} \sum_{j=|k|}^{n-1} \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\theta} = \frac{1}{n} \sum_{k=1-n}^{n-1} (n-|k|)\,\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\theta} = \sum_{k=1-n}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\theta}.$$

Cuando $|k| = n$, la expresión $1 - \frac{|k|}{n}$ vale cero, así que los sumandos extremos de la suma (14) se pueden omitir, sin cambiar el valor de la suma. En otras palabras, (14) y (15) son equivalentes. □

10. Proposición (el núcleo de Fejér como un polinomio trigonométrico, en la forma real).

$$\Phi_n(\theta) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cos(k\theta), \tag{16}$$

y también

$$\Phi_n(\theta) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cos(k\theta). \tag{17}$$

Demostración. Estas fórmulas se pueden deducir de (5), la demostración sería muy similar a la demostración de la Proposición 9. Para no repetir los razonamientos, vamos a deducir (16) de (14). Dividimos la suma del lado derecho de (14) en tres partes, correspondientes a los conjuntos $\{-n,\ldots,-1\}$, $\{0\}$ y $\{1,\ldots,n\}$:

$$\Phi_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\theta} + 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\theta}.$$

En la primera suma cambiamos la variable muda k por j, y en la tercera suma simplificamos $|k|$:

$$\Phi_n(\theta) = \sum_{j=-n}^{-1} \left(1 - \frac{|j|}{n}\right) \mathrm{e}^{j\,\mathrm{i}\,\theta} + 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\theta}. \tag{18}$$

Ahora en la primera suma hacemos el cambio de variable $k = -j$. Cuando j recorre el conjunto $\{-n,\ldots,-1\}$, la variable k recorre el conjunto $\{n,\ldots,1\} = \{1,\ldots,n\}$:

$$\sum_{j=-n}^{-1} \left(1 - \frac{|j|}{n}\right) \mathrm{e}^{j\,\mathrm{i}\,\theta} = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,\theta}.$$

Ahora podemos juntar y simplificar dos sumas en (18), usando la fórmula de Euler $\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,\theta} = 2\cos(k\theta)$:

$$\begin{aligned}
\Phi_n(\theta) &= \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,\theta} + 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\theta} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \left(\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,\theta}\right) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cos(k\theta).
\end{aligned}$$ □

11. Proposición (el valor del núcleo de Fejér en los múltiplos de 2π). Para cada $m \in \mathbb{Z}$,

$$\Phi_n(2m\pi) = n. \tag{19}$$

Demostración. Para verificar (19), usamos (13), (10) y la fórmula para la suma de la progresión aritmética:

$$\Phi_n(2m\pi) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(2j+1) = \frac{1+2(n-1)+1}{2} = n. \qquad \square$$

12. Proposición (el núcleo de Fejér como un cociente trigonométrico). Para cualquier $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\Phi_n(\theta) = \frac{1}{n}\left(\frac{\operatorname{sen}\dfrac{n\theta}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}}\right)^2. \tag{20}$$

Demostración. Usamos (13) y (7):

$$\Phi_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\theta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{n\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{(2k+1)\theta}{2}. \tag{21}$$

Recordemos que $\operatorname{sen}\varphi = \operatorname{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi})$ y consideremos la siguiente suma:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1)\theta/2} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta/2}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta/2}\,\frac{\mathrm{e}^{n\,\mathrm{i}\,\theta}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}-1}\\ &= \mathrm{e}^{n\,\mathrm{i}\,\theta/2}\,\frac{\mathrm{e}^{n\,\mathrm{i}\,\theta/2}-\mathrm{e}^{-n\,\mathrm{i}\,\theta/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta/2}-\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\theta/2}} = \mathrm{e}^{n\,\mathrm{i}\,\theta/2}\,\frac{\operatorname{sen}\frac{n\theta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}.\end{aligned}$$

Sacamos la parte imaginaria:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\theta}{2} = \frac{\left(\operatorname{sen}\frac{n\theta}{2}\right)^2}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}.$$

Sustituyendo este resultado en (21) obtenemos (20). $\square$

Propiedades elementales del núcleo de Fejér

13. El núcleo de Fejér es una función 2π-periódica y par. Inmediatamente de (13), (22) y (23),

$$\Phi_n(\theta + 2m\pi) = \Phi_n(\theta) \qquad (\theta \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{Z}). \tag{22}$$

El núcleo de Fejér es una función par:

$$\Phi_n(-\theta) = \Phi(\theta) \qquad (\theta \in \mathbb{R}). \tag{23}$$

14. El núcleo de Fejér siempre toma valores no negativos. Para cada $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_n(\theta) \geqslant 0. \tag{24}$$

Demostración. Es un corolario de (20) y (19). Notemos que esta propiedad no se ve fácilmente de las fórmulas (13), (14) o (16). □

15. Proposición (el valor máximo del núcleo de Fejér). La función Φ_n toma valores de 0 a n:

$$0 \leqslant \Phi_n(\theta) \leqslant n \qquad (\theta \in \mathbb{R}), \tag{25}$$

y el valor máximo n se alcanza solamente en los múltiplos de 2π.

Demostración. Tomando en cuenta (24) y (19), es suficiente demostrar que para cualquier θ en $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\Phi_n(\theta) < n.$$

Esto sale de (13) y (12): si $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, entonces

$$\Phi_n(\theta) < \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(2j+1) = n.$$ □

16. El período positivo mínimo del núcleo de Fejér. El número 2π es el período positivo mínimo de la función Φ_n.

Demostración. Ya sabemos que 2π es *un* período de la función Φ_n. Supongamos que $T > 0$ y T es un período de Φ_n:

$$\Phi_n(\theta + T) = \Phi_n(\theta) \qquad (\theta \in \mathbb{R}).$$

Aplicamos esta igualdad con $\theta = 0$. Por (19),

$$\Phi_n(T) = n.$$

Como vimos en la demostración de la Proposición 15, $\Phi_n(\theta) \neq n^2$ para $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. En particular, $\Phi_n(\theta) \neq n$ para $\theta \in (0, 2\pi)$. Por eso $T \geqslant 2\pi$. □

El núcleo de Fejér en términos de la función seno cardenal

17. Función seno cardinal (repaso). Recordemos que la función $\operatorname{senc}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida mediante la regla

$$\operatorname{senc}(x) := \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}, & x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Algunos autores prefieren usar la función senc normalizada, con el cociente $\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x}$, pero en estos apuntes trabajamos con funciones 2π-periódicas y usamos la función senc desnormalizada. Se puede demostrar de varias maneras que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1,$$

así que la función senc es continua en $\mathbb{R}$. De hecho, del punto de vista de análisis complejo, la función senc está definida en todo el plano complejo, es entera y se desarrolla en la serie

$$\operatorname{senc}(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}. \tag{26}$$

La fórmula (26) es válida para cualquier x real o complejo, y es especialmente útil cerca del punto 0, cuando la fórmula $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ puede generar errores de redondeo.

18. Cálculo del núcleo de Fejér usando la función seno cardinal. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, buscamos $\eta \in [0, \pi)$ y $m \in \mathbb{Z}$ tales que

$$|\theta| = \eta + 2m\pi,$$

y aplicamos la propiedad periódica y la propiedad par de la función Φ_n:

$$\Phi_n(\theta) = \Phi_n(|\theta|) = \Phi_n(\eta + 2m\pi) = \Phi_n(\eta).$$

Luego expresamos $\Phi_n(\eta)$ en términos de la función seno cardinal usando la fórmula (20):

$$\Phi_n(\theta) = \Phi_n(\eta) = n \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{n\eta}{2}}{\frac{n\eta}{2}} \; \frac{\frac{\eta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\eta}{2}} \right)^2 = n \left(\frac{\operatorname{senc} \frac{n\eta}{2}}{\operatorname{senc} \frac{\eta}{2}} \right)^2.$$

El último cociente está bien definido en el punto $\eta = 0$ y se calcula de manera numéricamente estable para η cercano al cero. De esta fórmula también se ve que $\Phi_n(2m\pi) = n$ para cada m en $\mathbb{Z}$.