El lema de Fatou

Objetivos. Demostrar el lema de Fatou usando el teorema de la convergencia monótona.

Requisitos. Funciones medibles, la integral de Lebesgue de funciones positivas medibles, supremos e ínfimos, límites superiores e inferiores, el teorema de la convergencia monótona.

Aplicaciones. El teorema de la convergencia dominada, la desigualdad para la integral de la derivada de una función creciente.

1 Teorema (teorema de la convergencia monótona de Lebesgue, repaso)**.** *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida y sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$*, puntualmente creciente. Denotemos por* $g\colon X \to [0, +\infty]$ *a la función límite:*

$$g(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Entonces $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ *y*

$$\int\limits_X g \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

En nuestro curso (igual que en los libros de Bartle y de Rudin), el lema de Fatou se obtiene como una consecuencia simple del teorema de la convergencia monótona. A diferencia del teorema de la convergencia monótona, en el lema de Fatou no se pide que la función de funciones sea monótona.

2 Proposición (lema de Fatou)**.** *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida y sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$*. Entonces*

$$\int\limits_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) \mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \, \mathrm{d}\mu. \tag{1}$$

Demostración. Idea: usar la definición del límite inferior y el teorema de la convergencia monótona.

Sea $h(x) \coloneqq \liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Definimos las siguientes funciones auxiliares:

$$g_k(x) \coloneqq \inf_{n\ge k} f_n(x).$$

Entonces, por la definición del $\liminf$,

$$h(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x).$$

Las funciones g_k son $\mathcal{F}$-medibles y la sucesión $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es creciente. Aplicamos el teorema de la convergencia monótona a esta sucesión de funciones:

$$\int\limits_X h\,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int\limits_X g_k\,\mathrm{d}\mu. \tag{2}$$

El lado izquierdo de (2) es el mismo que en la fórmula (1). Nos falta trabajar con el lado derecho de (2). Por la definición de g_k y por la definición del ínfimo,

$$\forall n \ge k \qquad \forall x \in X \qquad f_n(x) \ge g_k(x).$$

Por la monotonía de la integral respecto a la función,

$$\forall n \ge k \qquad \int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu \ge \int\limits_X g_k\,\mathrm{d}\mu.$$

Con esto hemos demostrado que el número $\int_X g_k\,\mathrm{d}\mu$ es una cota inferior del conjunto

$$\left\{ \int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu\colon \quad n \ge k \right\}.$$

Luego, por la definición del ínfimo,

$$\inf_{n\ge k} \int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu \ge \int\limits_X g_k\,\mathrm{d}\mu.$$

En esta desigualdad pasamos al límite cuando k tiende a infinito, y al final aplicamos (2):

$$\liminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\ge k} \int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu \ge \lim_{k\to\infty} \int\limits_X g_k\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X h\,\mathrm{d}\mu. \qquad \square$$

3 Observación. En muchas aplicaciones, la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función g. En este caso, $\liminf_{n\to\infty} f_n$ coincide con g, y el lema de Fatou afirma que

$$\int\limits_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) \mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu. \tag{3}$$

Notemos que aún en este caso, la desigualdad puede ser estricta.

En los siguientes dos ejercicios se muestran dos ejemplos de sucesiones de funciones, para las cuales la desigualdad en el lema de Fatou es estricta. De hecho, son ejemplos cuando la desigualdad en (3) es estricta. Estos dos ejemplos son muy similares, pero en uno se utiliza la medida de conteo, y en el otro la medida de Lebesgue.

4 Ejemplo. Denotemos por $\nu\colon 2^{\mathbb{N}} \to [0, +\infty]$ a la medida de conteo en $\mathbb{N}$. Para cada n en $\mathbb{N}$, definimos la función f_n por la regla

$$f_n(j) \coloneqq \delta_{j,n}.$$

Mostrar que f_n converge puntualmente a función constante cero, pero $\int_{\mathbb{N}} f_n \, \mathrm{d}\nu = 1$ para cada n en $\mathbb{N}$.

5 Ejemplo. Sea X el intervalo $(0, 1]$ con la medida de Lebesgue que denotamos por μ. Consideremos las funciones

$$f_n\colon (0,1] \to [0,+\infty), \qquad f_n(x) \coloneqq n\,\mathbb{1}_{(0,1/n]}(x) = \begin{cases} n, & 0 < x \le 1/n; \\ 0, & 1/n < x \le 1. \end{cases}$$

Denotemos por g la función constante cero en $(0, 1]$, es decir, $g \coloneqq 0_{(0,1]}$. Entonces $f_n \to g$,

$$\int\limits_X g \, \mathrm{d}\mu = 0,$$

pero para cada n en $\mathbb{N}$

$$\int\limits_X f_n \, \mathrm{d}\mu = 1.$$