El núcleo de Dirichlet

Objetivos. Demostrar varias fórmulas equivalentes para el núcleo de Dirichlet y estudiar sus propiedades elementales.

Requisitos. La suma de la progresión geométrica, fórmulas de Euler.

Aplicaciones. El núcleo de Dirichlet sirve para representar la suma parcial de Fourier $S_n(f)$ en forma integral. Varios resultados sobre la convergencia de sumas de Fourier se demuestran por medio del núcleo de Dirichlet.

Monomios y polinomios trigonométricos (repaso breve)

Definición 1 (monomios trigonométricos)**.** Para cada k en $\mathbb{Z}$, denotamos por φ_k a la función $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida mediante la fórmula

$$\varphi_k(\theta) := \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\theta}\,. \tag{1}$$

Definición 2 (polinomios trigonométricos)**.** Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se llama *polinomio trigonométrico* o *polinomio de Fourier* si f es una combinación lineal finita de algunas de las funciones φ_k, $k \in \mathbb{Z}$; en otras palabras, si existe un subconjunto finito A de $\mathbb{Z}$ y una familia $(c_k)_{k\in A}$ de números complejos tales que

$$f = \sum_{k\in A} c_k\varphi_k. \tag{2}$$

En otras palabras, f es un polinomio trigonométrico si existe un número $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ y algunos números c_k, $k \in \{-n, \ldots, n\}$, tales que

$$f = \sum_{k=-n}^{n} c_k\varphi_k. \tag{3}$$

Obviamente (3) es un caso particular de (2), con $A = \{-n, \ldots, n\}$. Por otro lado, para pasar de (2) a (3), es suficiente poner $n := \max\{|k|\colon\ k \in A\}$ y $c_k := 0$ para k en $\{-n, \ldots, n\} \setminus A$.

1. Período positivo mínimio del monomio trigonométrico (repaso breve). La función φ_0 es una función constante, por eso cualquier número real sirve como su período, y el período positivo mínimio no está definido. Si $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, entonces para cada θ en $\mathbb{R}$,

$$\varphi_k\left(\theta + \frac{2\pi}{|k|}\right) = \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\theta + 2\pi\,\mathrm{sgn}(k)} = \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\theta} = \varphi_k(\theta),$$

así que $\frac{2\pi}{k}$ es un período positivo de φ_k. Por otro lado, la función φ_k toma el valor 1 solamente en los puntos de la forma $\frac{2\pi j}{|k|}$, $j \in \mathbb{Z}$, por eso es fácil demostrar que el período positivo *mínimo* de φ_k es $\frac{2\pi}{|k|}$. Como 2π es un múltiplo de $\frac{2\pi}{|k|}$, la función φ_k es 2π-periódica.

2. Proposición (periodicidad de polinomios trigonométricos). Cada una de las funciones φ_k es 2π-periódica, por eso cualquier polinomio trigonométrico también es una función 2π-periódica.

3. Otras formas de trabajar con funciones periódicas. La periodicidad permite considerar polinomios trigonomericos como funciones definidas en el grupo cociente $\mathbb{R}_{2\pi} \coloneqq \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ o en la circunferencia unitaria $\mathbb{T}$, pero en estos apuntes no trabajamos así. Algunos autores prefieren trabajar con funciones $x \mapsto \mathrm{e}^{2\pi k \mathrm{i}\, x}$. Sus combinaciones lineales son 1-periódicas y se pueden considerar como funciones definidas en el grupo cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

El núcleo de Dirichlet

4. Definición del núcleo de Dirichlet como la suma de ciertas funciones básicas de Fourier. Para cada n en $\mathbb{N}_0 \coloneqq \{0, 1, 2, \ldots\}$, el núcleo de Dirichlet D_n es una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula:

$$D_n \coloneqq \sum_{k=-n}^{n} \varphi_k, \tag{4}$$

esto es,

$$D_n(\vartheta) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\vartheta}\,. \tag{5}$$

De la forma (4) o (5) es obvio que D_n es un polinomio trigonométrico.

Proposición 3 (el núcleo de Dirichlet como una combinación lineal de cosenos)**.**

$$D_n(\vartheta) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta). \tag{6}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} D_n(\vartheta) &= \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\vartheta} = \sum_{k=-n}^{-1} \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\vartheta} + 1 + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\vartheta} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\vartheta} + \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,\vartheta} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(k\vartheta). \end{aligned} \qquad \square$$

El núcleo de Dirichlet se puede calcular en forma cerrada (sin $\sum$).

Proposición 4 (fórmula cerrada para el núcleo de Dirichlet)**.**

$$D_n(\vartheta) = \frac{\operatorname{sen} \frac{(2n+1)\vartheta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}. \tag{7}$$

Del punto de vista elemental, el lado derecho de (7) no está definido en los puntos de la forma $\theta = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Sin embargo, en cada uno de estos puntos el lado derecho de (7) tiene límite $2n+1$ y se puede definir por continuidad. Del punto de vista de análisis complejo, D_n es una función analítica, los múltiplos de 2π son sus singularidades evitables, y el valor D_n en estos puntos se define de manera automática.

Demostración. Usamos la fórmula de la suma de la progresión geométrica.

$$\begin{aligned} D_n(\vartheta) &= \mathrm{e}^{-n\,\mathrm{i}\,\vartheta} \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{(k+n)\,\mathrm{i}\,\vartheta} = \mathrm{e}^{-n\,\mathrm{i}\,\vartheta} \sum_{k=0}^{2n} \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\vartheta} = \mathrm{e}^{-n\,\mathrm{i}\,\vartheta} \, \frac{\mathrm{e}^{(2n+1)\,\mathrm{i}\,\vartheta} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\vartheta} - 1} \\ &= \mathrm{e}^{-n\,\mathrm{i}\,\vartheta} \, \frac{\mathrm{e}^{\frac{(2n+1)\,\mathrm{i}\,\vartheta}{2}} \left(\mathrm{e}^{\frac{(2n+1)\,\mathrm{i}\,\vartheta}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{(2n+1)\,\mathrm{i}\,\vartheta}{2}} \right)}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\vartheta}{2}} \left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\vartheta}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,\vartheta}{2}} \right)} = \frac{\operatorname{sen} \frac{(2n+1)\vartheta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2}}. \end{aligned}$$

□

Proposición 5 (propiedades elementales del núcleo de Dirichlet)**.** *El núcleo de Dirichlet es una función 2π-periódica:*

$$D_n(\vartheta + 2m\pi) = D_n(\vartheta) \qquad (\theta \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{Z}). \tag{8}$$

El núcleo de Dirichlet es una función par:

$$D_n(-\vartheta) = D_n(\vartheta) \qquad (\theta \in \mathbb{R}). \tag{9}$$

El núcleo de Dirichlet tiene valor $2n+1$ en los múltiplos enteros de 2π, esto es, en los puntos del conjunto $2\pi\mathbb{Z}$:

$$D_n(2m\pi) = 2n+1 \qquad (m \in \mathbb{Z}). \tag{10}$$

El número $2n+1$ es el máximo valur absoluto de D_n, esto es, el valor absoluto de D_n se acota por $2n+1$:

$$|D_n(\theta)| \le 2n+1 \qquad (\theta \in \mathbb{R}). \tag{11}$$

Si θ no es un múltiplo de 2π, entonces $D_n(\theta)$ es estrictamente *menor que $2n+1$:*

$$D_n(\theta) < 2n+1 \qquad (\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}). \tag{12}$$

Para cada n en $\mathbb{N}$, el período positivo mínimo de la función D_n es 2π.

Demostración. Para la última propiedad, notamos que D_n toma el valor $2n+1$ *solamente* en los múltiplos de 2π. □