Sucesiones de Dirac

1. No existe unidad en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Recordamos que el espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$ con operaciones lineales y operación convolución como multiplicación es una álgebra de Banach. Resulta que esta álgebra no posée ningún elemento neutro respecto a la convolución. Es decir, no existe ninguna función $\delta \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se cumpla casi en todas partes la igualdad $\delta * f = f$. Tampoco hay $\delta \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\delta * f = f$ c.t.p. para todo f en cierto $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Vamos sin embargo a mostrar que existen sucesiones $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de funciones en $L^1(\mathbb{R}^n)$, tales que, para f en un espacio funcional conveniente, $\rho_k * f$ aproximará en cierto sentido la función f.

Definición (sucesión de Dirac). Una sucesión $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de funciones en $L^1(\mathbb{R}^n)$ se llama *sucesión de Dirac* si cumple las siguientes condiciones:

i) Para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\rho_k(x) \geq 0.$$

ii) Para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho_k = 1.$$

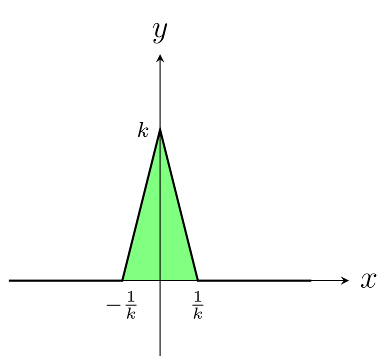
iii) Para todo $\delta > 0$,

$$\lim_{k\to+\infty} \int\limits_{|x|\leq\delta} \rho_k(x)\,dx = 1.$$

La condición iii) en vista de ii) puede reemplazarse por la siguiente:

$$\forall\delta > 0: \qquad \lim_{k\to+\infty} \int\limits_{|x|>\delta} \rho_k(x) = 0.$$

2. Ejemplo. Sea $\rho_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función lineal a trozos de soporte compacto, cuya gráfica pasa por los puntos $(-\frac{1}{k}, 0)$, $(0, k)$, $(\frac{1}{k}, 0)$:



3. Ejercicio. Sea ρ una función integrable real no negativa en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho = 1.$$

Para todo $k \in \mathbb{N}_1$ pongamos

$$\rho_k(x) := k^n \rho(kx).$$

Demuestre que $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Dirac.

4. Teorema (sucesiones de Dirac como unidades aproximadas para la convolución en L^p, $1 \le p < +\infty$). Sea $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Dirac. Sea $1 \le p < \infty$ y sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Entonces $(\rho_k * f)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a f en $L^p(\mathbb{R}^n)$:

$$\lim_{k\to\infty} \|\rho_k * f - f\|_p = 0.$$

Idea de la demostración.

$$f(x) - (\rho_k * f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x-y))\, \rho_k(y)\, dy.$$

De ahí, por la desigualdad de Jensen:

$$\begin{aligned} |f(x) - (\rho_k * f)(x)|^p &\le \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)|\, \rho_k(y)\, dy \right)^p \\ &\le \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)|^p\, \rho_k(y)\, dy. \end{aligned}$$

Al integrar resulta:

$$\begin{aligned} \|f - \rho_k * f\|_p^p &\le \int\limits_{\mathbb{R}^n} dx \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)|^p \rho_k(y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|f - f_y\|_p^p \rho_k(y)\, dy \\ &= \int\limits_{|y|\le\delta} \|f - f_y\|_p^p\, \rho_k(y)\, dy + \int\limits_{|y|>\delta} \|f - f_y\|_p^p\, \rho_k(y)\, dy \\ &\le \|f - f_y\|^p + 2^p \|f\|_p^p \int\limits_{|y|>\delta} \rho_k(y)\, dy. \end{aligned}$$

□

5. Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces en todo punto de continuidad x de f se tiene $|f(x)| \le \|f\|_\infty$.

6. Proposición (aproximación de una función acotada en sus puntos de continuidad). Sea $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Dirac. Sea $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si f es continua en un punto $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$f(x) = \lim_{k\to+\infty} (\rho_k * f)(x).$$

Idea de la demostración.

$$
\begin{aligned}
|f(x) - (\rho_k * f)(x)| &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)|\rho_k(y)\,dy \\
&= \int\limits_{|y|\leq\delta} |f(x) - f(x-y)|\,\rho_k(y)\,dy + \int\limits_{|y|>\delta} |f(x) - f(x-y)|\,\rho_k(y)\,dy. \square
\end{aligned}
$$

7. Proposición (aproximación uniforme un un compacto de una función continua). Sea $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Dirac. Sea $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Se supone f continua en un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$. Si K es un compacto contenido en Ω, entonces $(\rho_k * f)$ converge a f uniformemente en K.

8. Lema. Sean f, g funciones medibles $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tales que $f * g$ está definida. Si f, g son de soporte compacto, $f * g$ es de soporte compacto.

9. Proposición. Sea $1 \leq p < \infty$. El espacio vectorial $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ de las funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ de clase C^∞, de soporte compacto, es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

10. Teorema de aproximación polinomial de Weierstrass. Sea $[a, b]$ un intervalo compacto de $\mathbb{R}$. Designemos por $C([a, b])$ al espacio vectorial de las funciones continuas: $[a, b] \to \mathbb{C}$ provisto de la norma uniforme. Sea $\mathcal{P}([a, b])$ el subespacio de $C([a, b])$ constituído por las funciones polinomiales $[a, b] \to \mathbb{C}$. Entonces $\mathcal{P}([a, b])$ es denso en $C([a, b])$.