Derivadas de Dini

Objetivos. Introducir el concepto de las derivadas laterales superiores e inferiores de una función (derivadas de Dini).

Requisitos. Definición del límite superior e inferior, definición del límite lateral, definición de la derivada.

Los siguientes conceptos fueron introducidos por Ulisse Dini y a veces se llaman *derivadas de Dini*.

1. Definición (derivadas laterales superiores e inferiores). Sea A un invervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función, $x \in A$. Para cada x en A con $x < \sup(A)$ pongamos

$$D^+ f(x) \coloneqq \limsup_{t\to x^+} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \limsup_{h\to+0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h};$$
$$D_+ f(x) \coloneqq \liminf_{t\to x^+} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \liminf_{h\to+0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Para cada x en A con $x > \inf(A)$ pongamos

$$D^- f(x) \coloneqq \limsup_{t\to x^-} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \limsup_{h\to+0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h};$$
$$D_- f(x) \coloneqq \liminf_{t\to x^-} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \liminf_{h\to+0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}.$$

Notemos que estos límites superiores e inferiores siempre existen, al menos en el sentido extendido, es decir, como elementos de $[-\infty, +\infty]$.

2. Proposición.

$$(D^+ f) = \inf_{\eta>0} \sup_{t\in(x,x+\eta)\cap A} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}, \qquad (D^- f) = \inf_{\eta>0} \sup_{t\in(x-\eta,x)\cap A} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

Demostración. Se sigue de la definición del límite superior. □

3. Proposición.

$$(D_+ f)(x) = \sup_{\eta>0} \inf_{t\in(x,x+\eta)\cap A} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}, \qquad (D_- f)(x) = \sup_{\eta>0} \inf_{t\in(x-\eta,x)\cap A} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

Demostración. Se sigue de la definición del límite inferior. □

4. Observación. De las propiedades generales de los límites superiores e inferiores se sigue que

$$(D^+ f)(x) \geq (D_+ f)(x), \qquad (D^- f)(x) \geq (D_- f)(x).$$

5. Observación. Sea $c \in \operatorname{int}(A)$. La función f tiene derivada finita en el punto c si, y sólo si,

$$D^+ f(x) = D_+ f(x) = D^- f(x) = D_- f(x).$$

Más aún, en este caso, los valores de las derivadas de Dini coinciden con $f'(x)$.

6. Ejemplo. Calculemos las derivadas de Dini en el punto 0 de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} x \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

Solución. Vamos a mostrar de manera detallada cómo calcular $(D^+ f)(0)$. Sea $\eta > 0$, $\eta < 1$. Calculemos

$$\sup_{t \in (0,\eta)} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \sup_{t \in (0,\eta)} \frac{f(t)}{t}.$$

Por un lado, notemos que para cada t en $(0, \eta)$ se cumple la desigualdad

$$\frac{f(t)}{t} = \cos \frac{1}{t} \leq 1.$$

Por otro lado, pongamos

$$k_0 \coloneqq \left\lfloor \frac{1}{2\pi\eta} \right\rfloor + 1, \qquad u_0 \coloneqq \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k_0\pi}.$$

Entonces $k_0 > \frac{1}{2\pi\eta}$, $2k_0\pi > \frac{1}{\eta}$,

$$u_0 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k_0\pi} < \frac{1}{2k_0\pi} < \eta,$$

y

$$\frac{f(u)}{u} = \cos \frac{1}{u} = \cos \left(\frac{\pi}{2} + 2k_0\pi \right) = 1.$$

Esto significa que el cociente $\frac{f(t)}{t}$, donde $0 < t < \eta$, toma valores menores o iguales a 1, y alcanza su valor máximo 1 en el punto u. En realidad, este valor máximo se alcanza en una infinidad de puntos que se pueden construir como $\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$, $k \geq k_0$. Hemos demostrado que para cada $\eta > 0$

$$\sup_{t \in (0,\eta)} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = 1.$$

Tomamos el límite cuando $\eta \to 0^+$:

$$(D^+ f)(0) = \lim_{\eta \to 0^+} \sup_{t \in (0,\eta)} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = 1.$$

De manera similar se demuestra que

$$(D_+ f)(0) = -1, \qquad (D^- f)(0) = 1, \qquad (D_- f)(0) = -1.$$

$\square$

7. Ejercicio. Calcular las derivadas de Dini en el punto 0 de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

8. Ejercicio. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$.

1. Sea $g(x) = -f(x)$ para todo x en A. Entonces $D^+g(x) = -D_+f(x)$.
2. Sea $h(x) = f(-x)$ para todo x en A. Entonces $D^+h(x) = -D_-f(-x)$.

9. Ejercicio (derivadas de Dini de una función creciente). Supongamos que A es un intervalo de $\mathbb{R}$ y f crece en A. Entonces $D^+f \geq D_+f \geq 0$ y $D^-f \geq D_-f \geq 0$.

10. Ejercicio (derivadas de Dini en un máximo local). Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f \in C(A, \mathbb{R})$, $c \in \operatorname{int}(A)$. Supongamos que f tiene un máximo local en c. Entonces

$$D_+f(c) \leq D^+f(c) \leq 0 \leq D_-f(c) \leq D^-f(c).$$