Producto interno

Luis Alberto De la O Moya, Egor Maximenko,
Enrique Abdeel Muñoz de la Colina, Elisa Suárez Barraza

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

14 de diciembre de 2020

Objetivos y prerrequisitos

Objetivos: Recordar el concepto del producto interno y repasar algunas de sus propiedades elementales.

Objetivos y prerrequisitos

Objetivos: Recordar el concepto del producto interno y repasar algunas de sus propiedades elementales.

En esta presentación no incluimos la desigualdad de Schwarz y por eso no introducimos la norma asociada a un producto interno.

Objetivos y prerrequisitos

Objetivos: Recordar el concepto del producto interno y repasar algunas de sus propiedades elementales.

En esta presentación no incluimos la desigualdad de Schwarz y por eso no introducimos la norma asociada a un producto interno.

Prerrequisitos: formas sesquilineales.

Plan

Producto interno en espacios vectoriales complejos

Definición

Sea V un espacio vectorial complejo. Una función $p : V \times V \to \mathbb{C}$ se denomina producto interno si cumple con las siguientes propiedades:

- p es lineal respecto al primer argumento

$$p(\lambda a + b, c) = \lambda p(a, c) + p(b, c), \quad \forall a, b, c \in V, \lambda \in \mathbb{C};$$

- p es hermítica

$$p(a, b) = \overline{p(b, a)}, \quad \forall a, b \in V;$$

- p es definida positiva:

$$p(v, v) > 0, \quad \forall v \in V \setminus \{0\}.$$

Propiedades del producto interno

Proposición

1. p es lineal conjugada con respecto al segundo argumento:

$$p(a, \lambda b + c) = \overline{\lambda} p(a, b) + p(a, c), \quad \forall a, b, c \in V, \lambda \in \mathbb{C}.$$

2. $p(0_V, a) = p(a, 0_V) = 0$ para cualquier $a \in V$.

Propiedades del producto interno

Proposición

1. p es lineal conjugada con respecto al segundo argumento:

$$p(a, \lambda b + c) = \overline{\lambda} p(a, b) + p(a, c), \quad \forall a, b, c \in V, \lambda \in \mathbb{C}.$$

2. $p(0_V, a) = p(a, 0_V) = 0$ para cualquier $a \in V$.

Demostración. 1. $p(a, \lambda b + c) = \overline{p(\lambda b + c, a)}$

$$\begin{aligned} &= \overline{\lambda p(b, a) + p(c, a)} \\ &= \overline{\lambda}\ \overline{p(b, a)} + \overline{p(c, a)} \\ &= \overline{\lambda} p(a, b) + p(a, c). \end{aligned}$$

Propiedades del producto interno

2. $p(0_V, a) = p(0_V + 0_V, a) = p(0_V, a) + p(0_V, a)$

entonces

$$p(0_V, a) = 0.$$

Similarmente $p(a, 0_V) = 0$.

¿Por qué no sirve la propiedad bilineal?

Proposición

Sea V es un espacio vectorial complejo, $V \neq \{0_V\}$.

Entonces no existe una función $p : V \times V \to \mathbb{C}$ bilineal que sea positiva definida.

¿Por qué no sirve la propiedad bilineal?

Proposición

Sea V es un espacio vectorial complejo, $V \neq \{0_V\}$.

Entonces no existe una función $p : V \times V \to \mathbb{C}$ bilineal que sea positiva definida.

Demostración. Observemos qué sucedería si p cumple con todas estas condiciones.

¿Por qué no sirve la propiedad bilineal?

Proposición

Sea V es un espacio vectorial complejo, $V \neq \{0_V\}$.
Entonces no existe una función $p : V \times V \to \mathbb{C}$ bilineal que sea positiva definida.

Demostración. Observemos qué sucedería si p cumple con todas estas condiciones.

Sea $v \in V \setminus \{0_V\}$, entonces

$$p(iv, iv) = i^2 p(v, v) = -p(v, v) < 0.$$

¿Por qué no sirve la propiedad bilineal?

Proposición

Sea V es un espacio vectorial complejo, $V \neq \{0_V\}$.
Entonces no existe una función $p : V \times V \to \mathbb{C}$ bilineal que sea positiva definida.

Demostración. Observemos qué sucedería si p cumple con todas estas condiciones.

Sea $v \in V \setminus \{0_V\}$, entonces

$$p(iv, iv) = i^2 p(v, v) = -p(v, v) < 0.$$

Resumen: en la definición del producto interno p no podemos pedir la propiedad bilineal, si queremos que p sea positivo definido.

Ejemplos de producto interno

En los siguientes ejemplos, la propiedad de linealidad ya fue demostrada en el tema de formas sesquilineales. Se deja como ejercicio probar que p es hermítica y definida positiva.

Ejemplos de producto interno

En los siguientes ejemplos, la propiedad de linealidad ya fue demostrada en el tema de formas sesquilineales. Se deja como ejercicio probar que p es hermítica y definida positiva.

Ejemplo (el producto interno en $\mathbb{C}^n$ asociado a un vector de peso)

Sea $w = [w_j]_{j=1}^n \in [0, +\infty)^n$. Definimos

$$p\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \qquad p(x, y) := \sum_{j=1}^n w_j x_j \overline{y_j}.$$

Entonces p es un producto interno.

Ejemplos de producto interno

Ejemplo

Sea E el espacio vectorial complejo de las funciones complejas continuas definidas en el intervalo cerrado real $[a, b]$. Es decir,

$$E = C([a, b], \mathbb{C}) = \{x : [a, b] \to \mathbb{C},\ p \text{ es continua}\}.$$

Sea $w \in E$ tal que $w(t) > 0$ para cada t en $[a, b]$. Definimos

$$p\colon E \times E \to \mathbb{C}, \qquad p(x, y) = \int_a^b w(t)x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Demostrar que p es un producto interno.

Ejemplos de producto interno

Ejemplo

Sea E el espacio vectorial complejo de las sucesiones complejas $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finitamente no nulas (es decir con sólo un número finito de términos no nulos), con las operaciones habituales. Sea $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}}$. Definimos

$$p\colon E \times E \to \mathbb{C}, \qquad p(x, y) = \sum_{j\in\mathbb{N}} w_j x_j \overline{y_j}.$$

Demostrar que p es un producto interno.

Ejemplos de producto interno

Ejercicio

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, es decir, sea A una matriz compleja cuadrada $n \times n$. Definimos

$$p \colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \qquad p(x, y) := y^* A x,$$

donde y^* es el vector transpuesto conjugado de y. Entonces,

$$p \text{ es un producto interno} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{¿qué condiciones debe cumplir } A\text{?}.$$

Plan

1. Definición, propiedades y ejemplos del producto interno
2. Consecuencias inmediatas de la propiedad sesquilineal
3. Ortogonalidad
4. Propiedades elementales de $\langle a, a\rangle$

En lo que sigue, suponemos que H es un espacio vectorial complejo y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno en H.

En lo que sigue, suponemos que H es un espacio vectorial complejo y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno en H.

Empezaremos con las propiedades que hemos demostrado para formas sesquilineales. En particular, estas propiedades son ciertas para cualquier producto interno.

En lo que sigue, suponemos que H es un espacio vectorial complejo y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno en H.

Empezaremos con las propiedades que hemos demostrado para formas sesquilineales. En particular, estas propiedades son ciertas para cualquier producto interno.

Proposición

Para cada $m \in \mathbb{N}$, cualesquiera $a_1, a_2, \ldots, a_m \in H$, cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ y cualquier $b \in H$,

$$\left\langle \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j, b \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle a_j, b\rangle.$$

Demostración. Procedemos por inducción sobre m.

Definimos

$$\mathscr{A}(m) : \left\langle \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j, b \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle a_j, b\rangle.$$

Demostración. Procedemos por inducción sobre m.

Definimos

$$\mathscr{A}(m) : \left\langle \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j, b \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle a_j, b\rangle.$$

$\mathscr{A}(2)$:

$$\left\langle \sum_{j=1}^{2} \lambda_j a_j, b \right\rangle = \langle \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b\rangle = \lambda_1 \langle a_1, b\rangle + \lambda_2 \langle a_2, b\rangle = \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \langle a_j, b\rangle.$$

$\mathscr{A}(m+1)$: Suponemos cierto $\mathscr{A}(m)$, entonces

$$\left\langle \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j a_j, b \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j + \lambda_{m+1} a_{m+1}, b \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j a_j, b \right\rangle + \lambda_{m+1} \langle a_{m+1}, b \rangle.$$

Proposición

Para cada $m \in \mathbb{N}$, cualesquiera $b_1, b_2, \ldots, b_m \in H$, cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ y cualquier $a \in H$,

$$\left\langle a, \sum_{j=1}^{m} \lambda_j b_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} \overline{\lambda_j} \langle a, b_j \rangle.$$

Demostración. La demostración es por inducción sobre m.

Plan

Ortogonalidad de dos vectores respecto a un producto interno

Definición (vectores ortogonales respecto al producto interno elegido)

Sean $a, b \in H$.

$$a \perp b \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \langle a, b\rangle = 0.$$

Propiedades elementales de la ortogonalidad

Proposición (propiedad simétrica)

Sean $a, b \in H$ tales que $a \perp b$. Entonces $b \perp a$.

Propiedades elementales de la ortogonalidad

Proposición (propiedad simétrica)

Sean $a, b \in H$ tales que $a \perp b$. Entonces $b \perp a$.

Demostración. Se sigue de la propiedad hermítica de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Propiedades elementales de la ortogonalidad

Proposición (propiedad simétrica)

Sean $a, b \in H$ tales que $a \perp b$. Entonces $b \perp a$.

Demostración. Se sigue de la propiedad hermítica de $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Proposición

Sea $a \in H$ tal que $a \perp a$. Entonces $a = 0_H$.

Propiedades elementales de la ortogonalidad

Proposición (propiedad simétrica)

Sean $a, b \in H$ tales que $a \perp b$. Entonces $b \perp a$.

Demostración. Se sigue de la propiedad hermítica de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Proposición

Sea $a \in H$ tal que $a \perp a$. Entonces $a = 0_H$.

Demostración. Se sigue de que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es definida positiva.

El complemento ortogonal de un conjunto

Comenzaremos con definiciones preliminares.

El complemento ortogonal de un conjunto

Comenzaremos con definiciones preliminares.

Definición (Conjuntos ortogonales)

Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno y $X, Y \subset V$. Diremos que X y Y son ortoganales y escribiremos $X \perp Y$ si para todo $x \in X$, y para todo $y \in Y$, se tiene $x \perp y$.

Definición

Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno, sea $v \in V$ y $Y \subset V$. Diremos que v es ortogonal a Y y escribiremos $v \perp Y$ si para todo $y \in Y$, $v \perp y$.

El complemento ortogonal de un conjunto

Definición

Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno y sea $X \subset V$. Definiremos el complemento ortogonal de X, el cual se denotará por $X^\perp$, como el conjunto de todos los vectores en V que son ortogonales a X:

$$X^\perp := \{v \in V : \quad \forall x \in X \quad v \perp x\}$$

El complemento ortogonal de un conjunto

Definición

Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno y sea $X \subset V$. Definiremos el complemento ortogonal de X, el cual se denotará por $X^\perp$, como el conjunto de todos los vectores en V que son ortogonales a X:

$$X^\perp := \{v \in V : \quad \forall x \in X \quad v \perp x\}$$

Proposición (El complemento ortogonal de un conjunto es un subespacio)

Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno y $X \subset V$. Entonces $X^\perp$ es un subespacio de V.

La demostración se deja como ejercicio.

Propiedad monótona (decreciente) del complemento ortogonal

Proposición

Sea V un espacio vectorial con producto interno, y sean $X, Y \subset V$ tales que $X \subset Y$. Entonces $Y^{\perp} \subset X^{\perp}$.

Demostración: Sea $a \in Y^{\perp}$, entonces para cada $y \in Y$, $\langle y, a\rangle = 0$.

Sea $x \in X$. Como $X \subset Y$, entonces $x \in Y$, por lo que $\langle x, a\rangle = 0$. Luego, $a \in X^{\perp}$.

Un conjunto tiene el mismo complemento ortogonal que el subespacio generado por este conjunto

Proposición

Sean $m \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_m \in H$, $A = \ell(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Entonces $A^\perp = B^\perp$.

La contención $A^\perp \subset B^\perp$ se tiene de la proposición anterior.

Sea $x \in B^\perp$, entonces para cada $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tenemos $\langle a_k, x\rangle = 0$. Sea $a \in A$, entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ tales que $a = \sum_{j=1}^m \lambda_j a_j$. Luego

$$\langle a, x\rangle = \langle \sum_{j=1}^m \lambda_j a_j, x\rangle = \sum_{j=1}^m \lambda_j \langle a_j, x\rangle = 0 \implies x \in A^\perp.$$

Plan

Consideramos la forma cuadrática $q\colon H \to \mathbb{C}$, $a \mapsto \langle a, a\rangle$ asociada al producto interno.

Consideramos la forma cuadrática $q\colon H \to \mathbb{C}$, $a \mapsto \langle a, a\rangle$ asociada al producto interno.

Vamos a repetir algunas propiedades que hemos demostrado para formas cuadráticas asociadas a formas sesquilineales.

Consideramos la forma cuadrática $q\colon H \to \mathbb{C}$, $a \mapsto \langle a, a\rangle$ asociada al producto interno.

Vamos a repetir algunas propiedades que hemos demostrado para formas cuadráticas asociadas a formas sesquilineales.

Proposición

Sean $a, b \in H$. Entonces

$$\langle a + b, a + b\rangle = \langle a, a\rangle + \langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle + \langle b, b\rangle.$$

Consideramos la forma cuadrática $q\colon H \to \mathbb{C}$, $a \mapsto \langle a, a\rangle$ asociada al producto interno.

Vamos a repetir algunas propiedades que hemos demostrado para formas cuadráticas asociadas a formas sesquilineales.

Proposición

Sean $a, b \in H$. Entonces

$$\langle a + b, a + b\rangle = \langle a, a\rangle + \langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle + \langle b, b\rangle.$$

Demostración. Es inmediata, pues el producto interno $\langle \cdot, \cdot\rangle$ es una forma sesquilineal.

Identidad de Pitágoras

Proposición

Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en H. Entonces $\forall\ a, b \in H$ tales que $a \perp b$,

$$\langle a + b, a + b \rangle = \langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle.$$

Identidad de Pitágoras

Proposición

Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en H. Entonces $\forall\ a, b \in H$ tales que $a \perp b$,

$$\langle a+b, a+b \rangle = \langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \langle a+b, a+b \rangle &= \langle a, a \rangle + \langle a, b \rangle + \langle b, a \rangle + \langle b, b \rangle \\ &= \langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle. \end{aligned}$$

Identidad de paralelogramo

Proposición (la identidad del paralelogramo para producto interno)

Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en H. Entonces $\forall\ a, b \in H$,

$$\langle a + b, a + b \rangle + \langle a - b, a - b \rangle = 2(\langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle).$$

Identidad de paralelogramo

Proposición (la identidad del paralelogramo para producto interno)

Sea $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno en H. Entonces $\forall\ a, b \in H$,

$$\langle a+b, a+b\rangle + \langle a-b, a-b\rangle = 2(\langle a, a\rangle + \langle b, b\rangle).$$

Demostración. Es inmediata, pues el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es una forma sesquilineal.

Identidad de polarización

Proposición (la identidad de polarización para producto interno)

Sea $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno en H y q la forma cuadratica asociada al producto interno. Entonces $\forall\, a, b \in H$,

$$\langle a, b\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k q(a + i^k b).$$

Identidad de polarización

Proposición (la identidad de polarización para producto interno)

Sea $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno en H y q la forma cuadratica asociada al producto interno. Entonces $\forall\ a, b \in H$,

$$\langle a, b\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k q(a + i^k b).$$

Demostración. Es inmediata, pues el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es una forma sesquilineal.