La norma asociada a un producto interno

Luis Alberto De la O Moya, Egor Maximenko,
Enrique Abdeel Muñoz de la Colina, Elisa Suárez Barraza

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

14 de diciembre de 2020

Plan

Contenido

Objetivos

Dado un espacio vectorial complejo H con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, demostrar que la función

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

tiene propiedades de norma.

Demostrar que el producto interno es continuo respecto esta norma.

Repasar algunas propiedades del producto interno con la notación de norma.

Prerrequisitos

- Propiedades básicas de números complejos.
- Desigualdad de Schwarz.
- Propiedades básicas del producto interno.
- Definición de norma en espacios vectoriales complejos.

Algunas propiedades de números complejos, repaso

Proposición

Para cada z en $\mathbb{C}$,

$$z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z).$$

Proposición

Para cada z en $\mathbb{C}$,

$$\mathrm{Re}(z) \leq |\,\mathrm{Re}(z)| \leq |z|.$$

Definición del producto interno, repaso

Sea H un espacio vectorial complejo, una función $p : H \times H \to \mathbb{C}$ se llama producto interno si cumple:

- p es lineal respecto al primer argumento.

$$p(\lambda a + b, c) = \lambda p(a, c) + p(b, c) \quad \forall a, b, c \in H, \lambda \in \mathbb{C};$$

- p es hermítica

$$p(a, b) = \overline{p(b, a)} \quad \forall a, b \in H$$

- p es definida positiva

$$p(a, a) > 0 \;\; \forall a \in H \setminus \{0\}.$$

Desigualdad de Schwarz, repaso

Proposición

Sean $a, b \in H$. Entonces

$$|\langle a, b\rangle|^2 \leq \langle a, a\rangle\langle b, b\rangle$$

Plan

Proposición

Sea H un espacio vectorial complejo con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definimos $N \colon H \to \mathbb{C}$,

$$N(v) := \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Entonces N es una norma:

- $N(a+b) \leq N(a) + N(b), \quad \forall a, b \in H;$
- $N(\lambda a) = |\lambda| N(a), \quad \forall a \in H;$
- $\forall v \in H \setminus \{0_H\}, \qquad N(v) > 0.$

Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $a, b \in H$. Entonces

Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $a, b \in H$. Entonces

$$
\begin{aligned}
N(a+b)^2 &= \langle a+b, a+b\rangle \\
&= \langle a, a+b\rangle + \langle b, a+b\rangle \\
&= \langle a, a\rangle + \langle a, b\rangle + \overline{\langle a, b\rangle} + \langle b, b\rangle \\
&= N(a)^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle a, b\rangle) + N(b)^2 \\
\text{Por la desigualdad de Schwarz} \quad &\le N(a)^2 + 2N(a)N(b) + N(b)^2 \\
&= (N(a)+N(b))^2
\end{aligned}
$$

Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $a, b \in H$. Entonces

$$
\begin{aligned}
N(a+b)^2 &= \langle a+b, a+b \rangle \\
&= \langle a, a+b \rangle + \langle b, a+b \rangle \\
&= \langle a, a \rangle + \langle a, b \rangle + \overline{\langle a, b \rangle} + \langle b, b \rangle \\
&= N(a)^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle a, b \rangle) + N(b)^2 \\
\text{Por la desigualdad de Schwarz} \quad &\leq N(a)^2 + 2N(a)N(b) + N(b)^2 \\
&= (N(a) + N(b))^2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $N(a+b) \leq N(a) + N(b)$. La propiedad absolutamente homogenea y definida positiva se dejan como ejercicio.

Vamos a denotar esta norma por $\|\cdot\|$.

Plan

Desigualdad de Schwarz

Vamos a ver algunas propiedades de la norma, inducida por un producto interno, y sus relaciones con este producto interno.

Ya habíamos demostrado estas propiedades usando otra notación.

Desigualdad de Schwarz

Para cualesquier a, b en H,

$$|\langle a, b\rangle| \leq \|a\| \, \|b\|.$$

Identidad de Pitágoras

Proposición

Sean $a, b \in H$ tales que $a \perp b$, entonces

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

Demostración.

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle a, b\rangle) + \|b\|^2.$$

Como $a \perp b$, $\langle a, b\rangle = 0$, luego se obtiene el resultado requerido.

Identidad de paralelogramo

Proposición

Para cualesquiera $a, b \in H$

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2).$$

Demostración. Sabemos que

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle a, b\rangle) + \|b\|^2.$$

Identidad de paralelogramo

Proposición

Para cualesquiera $a, b \in H$

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2).$$

Demostración. Sabemos que

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle a, b\rangle) + \|b\|^2.$$

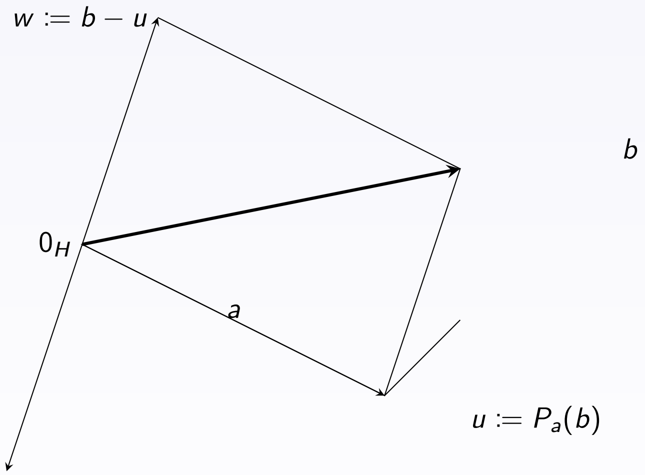
Por otra parte,

$$\|a-b\|^2 = \|a\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\langle a, b\rangle) + \|b\|^2.$$

Sumando ambas igualdades obtenemos

$$
\begin{aligned}
\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 &= \|a\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle a, b\rangle) + \|b\|^2 \\
&\quad + \|a\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\langle a, b\rangle) + \|b\|^2 \\
&= 2(\|a\|^2 + \|b\|^2).
\end{aligned}
$$

El sentido geométrico de la identidad del paralelogramo



Identidad de polarización

Proposición

Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno en H y $\|\cdot\|$ la norma inducida por ese producto interno. Entonces $\forall a, b \in H$

$$\langle a, b \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \|a + i^k b\|^2$$

Identidad de polarización

Proposición

Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno en H y $\| \cdot \|$ la norma inducida por ese producto interno. Entonces $\forall a, b \in H$

$$\langle a, b \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \|a + i^k b\|^2$$

El sentido principal de esta identidad:

el producto interno se puede expresar en términos de la norma inducida.

Ejercicio de aplicación de la identidad de polarización

Ejercicio

Mostrar que la norma en $\ell^1(\mathbb{N})$ no proviene de ningún producto interno.

Se sugiere usar la identidad del paralelogramo.

Plan

Espacios con producto interno, normados, métricos y topológicos

El producto interno induce una norma.

La norma induce una métrica.

La métrica induce una topología.

Sabemos que en cada espacio normado complejo las operaciones lineales son continuas, y la norma es continua.

Proposición

El producto interno, considerado como una función $H \times H \to \mathbb{C}$, es continuo.

Demostración

Sean $a, b \in H$ y sea $\epsilon > 0$. Para cada $x, y \in H$ obtenemos la siguiente cota superior (basada en la desigualdad de Schwarz):

Demostración

Sean $a, b \in H$ y sea $\epsilon > 0$. Para cada $x, y \in H$ obtenemos la siguiente cota superior (basada en la desigualdad de Schwarz):

$$\begin{aligned}
|\langle x, y\rangle - \langle a, b\rangle| &= |\langle x, y\rangle - \langle x, b\rangle + \langle x, b\rangle - \langle a, b\rangle| \\
&\leq |\langle x, y - b\rangle + \langle x - a, b\rangle| \leq \|x\|\|y - b\| + \|x - a\|\|b\| \\
&\leq (\|a\| + \|x - a\|)\|y - b\| + \|x - a\|\|b\|.
\end{aligned}$$

Demostración

Sean $a, b \in H$ y sea $\epsilon > 0$. Para cada $x, y \in H$ obtenemos la siguiente cota superior (basada en la desigualdad de Schwarz):

$$\begin{aligned}
|\langle x, y\rangle - \langle a, b\rangle| &= |\langle x, y\rangle - \langle x, b\rangle + \langle x, b\rangle - \langle a, b\rangle| \\
&\leq |\langle x, y - b\rangle + \langle x - a, b\rangle| \leq \|x\|\|y - b\| + \|x - a\|\|b\| \\
&\leq (\|a\| + \|x - a\|)\|y - b\| + \|x - a\|\|b\|.
\end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, pongamos

$$\delta = \frac{\epsilon}{1 + \|a\| + \|b\| + \epsilon},$$

Demostración

Notemos que $0 < \delta < 1$. Si $\|x - a\| < \delta$ y $\|y - b\| < \delta$, entonces

Demostración

Notemos que $0 < \delta < 1$. Si $\|x - a\| < \delta$ y $\|y - b\| < \delta$, entonces

$$| \langle x, y\rangle - \langle a, b\rangle | \leq (\|a\| + \|b\| + \delta)\delta < \epsilon.$$

Corolario (continuidad del producto interno en términos de sucesiones)

Sean $a, b \in H$ y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en H que convergen a los puntos a y b, respectivamente. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle a, b \rangle.$$

Corolario (continuidad del producto interno en términos de sucesiones)

Sean $a, b \in H$ y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en H que convergen a los puntos a y b, respectivamente. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle a, b \rangle.$$

Corolario

Sea H un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon H \times H \to \mathbb{C}$ y $a \in H$. Definimos el funcional $\varphi_a\colon H \to \mathbb{C}$ como $\varphi_a(x) := \langle x, a \rangle$. Entonces φ_a es continuo.

Ejercicio

Ejercicio

Sea $p \in [1, +\infty]$, $p \neq 2$. Demostrar que en el espacio $\ell^p(\mathbb{N})$ no existe producto interno que induzca la norma $\|\cdot\|_p$.

Ejercicio

Ejercicio

Sea $p \in [1, +\infty]$, $p \neq 2$. Demostrar que en el espacio $\ell^p(\mathbb{N})$ no existe producto interno que induzca la norma $\|\cdot\|_p$.

Sugerencia. Verificar que

$$\|e_1 + e_2\|_p^2 + \|e_1 - e_2\|_p^2 \neq 2(\|e_1\|_p^2 + \|e_2\|_p^2).$$

Tarea adicional

Tarea adicional

Sea V un espacio vectorial complejo normado tal que la norma satisface la identidad del paralelogramo, entonces en V se puede construir un producto interno que induce la norma original.

Tarea adicional

Tarea adicional

Sea V un espacio vectorial complejo normado tal que la norma satisface la identidad del paralelogramo, entonces en V se puede construir un producto interno que induce la norma original.

Sugerencia. Usar la identidad de polarización.