Formas sesquilineales

Luis Alberto De la O Moya, Egor Maximenko,
Enrique Abdeel Muñoz de la Colina, Elisa Suárez Barraza

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

29 de noviembre de 2020

Contenido

Prerrequisitos

- Espacios vectoriales complejos.
- Funciones lineales y bilineales en espacios vectoriales.
- El producto interno canónico en $\mathbb{C}^n$.

Plan

Definición de forma sesquilineal

Asumiremos siempre que H es un espacio vectorial complejo.

Definición

Una función $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$ se llama forma sesquilineal (o función sesquilineal), si es lineal respecto al primer argumento y lineal conjugada respecto al segundo, es decir, para cada $a, b, c \in H$ y cada $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda a + \mu b, c) &= \lambda f(a, c) + \mu f(b, c) \\ f(a, \lambda b + \mu c) &= \overline{\lambda} f(a, b) + \overline{\mu} f(a, c). \end{aligned}$$

Definición de forma sesquilineal

Asumiremos siempre que H es un espacio vectorial complejo.

Definición

Una función $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$ se llama forma sesquilineal (o función sesquilineal), si es lineal respecto al primer argumento y lineal conjugada respecto al segundo, es decir, para cada $a, b, c \in H$ y cada $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,

$$f(\lambda a + \mu b, c) = \lambda f(a, c) + \mu f(b, c)$$
$$f(a, \lambda b + \mu c) = \overline{\lambda} f(a, b) + \overline{\mu} f(a, c).$$

En adelante, entenderemos que $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal.

Ejemplo: la forma sesquilineal en $\mathbb{C}^n$ asociada a un vector de peso

Ejemplo

Sea $p = [p_j]_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n$. Definimos

$$f\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \qquad f(x,y) := \sum_{j=1}^n p_j x_j \overline{y_j}.$$

Entonces f es una forma sesquilineal.

Ejemplo: la forma sesquilineal en $\mathbb{C}^n$ asociada a una matriz

Ejemplo

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, es decir, sea A una matriz compleja cuadrada $n \times n$. Definimos

$$f\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \qquad f(x, y) := y^* A x,$$

donde y^* es el vector transpuesto conjugado de y. En otras palabras,

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} \overline{y_1} & \dots & \overline{y_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{j,k=1}^{n} A_{j,k} x_k \overline{y_j}.$$

Entonces f es una forma sesquilineal.

Ejemplos de formas sesquilineales

Ejemplo

Sea E el espacio vectorial complejo de las funciones complejas continuas definidas en el intervalo cerrado real $[a, b]$. Es decir,

$$E = C([a, b], \mathbb{C}) = \{x : [a, b] \to \mathbb{C},\ f \text{ es continua}\}.$$

Sea $p \in E$, definimos

$$f : E \times E \to \mathbb{C}, \qquad f(x, y) = \int_a^b p(t)x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t,$$

demostrar que f es una forma sesquilineal.

Ejemplos de formas sesquilineales

Demostración:

Sabemos que:

$$\forall\ h, g \in E, \quad \overline{h} \in E, \quad hg \in E,$$

Ejemplos de formas sesquilineales

Demostración:

Sabemos que:

$$\forall\ h, g \in E, \quad \overline{h} \in E, \quad hg \in E,$$

por lo que la integral dada existe y es un número complejo. Luego la aplicación f está bien definida.

Ejemplos de formas sesquilineales

Entonces, $\forall x, y, z \in E$,

$$\begin{aligned}
f(\lambda x+\mu y, z) &= \int_a^b p(t)(\lambda x(t)+\mu y(t))\overline{z(t)}dt \\
&= \lambda \int_a^b p(t)x(t)\overline{z(t)}dt + \mu \int_a^b p(t)y(t)\overline{z(t)}dt \\
&= \lambda f(x,z)+\mu f(y,z). \\
f(x, \lambda y+\mu z) &= \int_a^b p(t)x(t)(\overline{\lambda y(t)+\mu z(t)})dt \\
&= \overline{\lambda} \int_a^b p(t)x(t)\overline{y(t)}dt + \overline{\mu} \int_a^b p(t)x(t)\overline{z(t)}dt \\
&= \overline{\lambda} f(x,y)+\overline{\mu} f(x,z).
\end{aligned}$$

Ejemplos de formas sesquilineales

Ejemplo

Sea E el espacio vectorial complejo de las sucesiones complejas $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finitamente no nulas (es decir con sólo un número finito de términos no nulos), con las operaciones habituales. Sea $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arbitraria, definimos

$$f\colon E \times E \to \mathbb{C}, \quad f(x, y) = \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j x_j \overline{y_j}$$

Demostrar que f es una forma sesquilineal.

Ejemplos de formas sesquilineales

Demostración:

$$\begin{aligned} f(\lambda x+\mu y, z) &= \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j(\lambda x_j+\mu y_j)\overline{z_j} \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j(\lambda x_j\overline{z_j}+\mu y_j\overline{z_j}) \\ &= \lambda\sum_{j\in\mathbb{N}} p_j x_j\overline{z_j}+\mu\sum_{j\in\mathbb{N}} p_j y_j\overline{z_j} \\ &= \lambda f(x,z)+\mu f(y,z). \end{aligned}$$

Ejemplos de formas sesquilineales

$$\begin{aligned} f(x, \lambda y + \mu z) &= \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j x_j (\overline{\lambda y_j + \mu z_j}) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j x_j (\overline{\lambda}\,\overline{y_j} + \overline{\mu}\,\overline{z_j}) \\ &= \overline{\lambda} \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j x_j \overline{y_j} + \overline{\mu} \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j x_j \overline{z_j} \\ &= \overline{\lambda} f(x, y) + \overline{\mu} f(x, z). \end{aligned}$$

Plan

Propiedades de las formas sesquilineales

Proposición

Para cada $m \in \mathbb{N}$, cualesquiera $a_1, a_2, \ldots, a_m \in H$, cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ y cualquier $b \in H$:

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j, b\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f(a_j, b).$$

Propiedades de las formas sesquilineales

Proposición

Para cada $m \in \mathbb{N}$, cualesquiera $a_1, a_2, \ldots, a_m \in H$, cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ y cualquier $b \in H$:

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j, b\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f(a_j, b).$$

Demostración: Procedemos por inducción sobre m.

Definimos

$$\mathscr{A}(m) : f\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j, b\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f(a_j, b).$$

Propiedades de las formas sesquilineales

$\mathscr{A}(2)$:

$$f\left(\sum_{j=1}^{2}\lambda_j a_j, b\right) = f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b) = \lambda_1 f(a_1, b) + \lambda_2 f(a_2, b) = \sum_{j=1}^{2}\lambda_j f(a_j, b).$$

$\mathscr{A}(m+1)$: Suponemos cierto $\mathscr{A}(m)$

$$f\left(\sum_{j=1}^{m+1}\lambda_j a_j, b\right) = f\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j a_j + \lambda_{m+1}a_{m+1}, b\right) = f\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j a_j, b\right) + \lambda_{m+1} f(a_{m+1}, b).$$

Propiedades de las formas sesquilineales

Proposición

Para cada $m \in \mathbb{N}$, cualesquiera $a_1, a_2, \ldots, a_m \in H$, cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ y cualquier $b \in H$,

$$f\left(b, \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \overline{\lambda_j} f(b, a_j).$$

Propiedades de las formas sesquilineales

Proposición

Para cada $m \in \mathbb{N}$, cualesquiera $a_1, a_2, \ldots, a_m \in H$, cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ y cualquier $b \in H$,

$$f\left(b, \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \overline{\lambda_j} f(b, a_j).$$

Demostración: Se tiene por inducción sobre la definición de forma sesquilineal.

Propiedades de las formas sesquilineales

Proposición

Para cada $m, n \in \mathbb{N}$, cualesquiera $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n \in H$, cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m \in \mathbb{C}$, entonces:

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j, \sum_{k=1}^{n} \mu_k b_k\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \lambda_j \overline{\mu_k} f(a_j, b_k).$$

Propiedades de las formas sesquilineales

Proposición

Para cada $m, n \in \mathbb{N}$, cualesquiera $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n \in H$, cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m \in \mathbb{C}$, entonces:

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j, \sum_{k=1}^{n} \mu_k b_k\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \lambda_j \overline{\mu_k} f(a_j, b_k).$$

Demostración: Se tiene de las dos proposiciones anteriores.

Propiedades de las formas sesquilineales

Proposición

Sea $A \subset H$. Definimos el conjunto $S_A := \{b \in H \colon \forall a \in A, f(a, b) = 0\}$.

Entonces S_A es subespacio de H.

Demostración:

Sean $x_1, x_2 \in S_A$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$f(b, x_1 + \lambda x_2) = f(b, x_1) + \overline{\lambda} f(b, x_2) = 0.$$

Luego, $x_1 + \lambda x_2 \in S_A$, por lo que S_A será un subespacio de H.

Proposición

Sean $A, B \subset H$. Como en la proposición anterior, definimos los conjuntos S_A y S_B. Si

$A \subset B$ entonces $S_B \subset S_A$.

Proposición

Sean $A, B \subset H$. Como en la proposición anterior, definimos los conjuntos S_A y S_B. Si $A \subset B$ entonces $S_B \subset S_A$.

Demostración: Sea $x \in S_B$, entonces $\forall b \in B$, se tiene $f(b, x) = 0$. Como $A \subset B$, se cumple $\forall b \in A$, $f(b, x) = 0$. Luego, $S_B \subset S_A$.

Propiedades de las formas sesquilineales

Proposición

Sean $m \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_m \in H$, $A = \ell(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.

Definimos S_A y S_B como en la proposición anterior. Entonces $S_A = S_B$.

Propiedades de las formas sesquilineales

Proposición

Sean $m \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_m \in H$, $A = \ell(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.
Definimos S_A y S_B como en la proposición anterior. Entonces $S_A = S_B$.

Demostración: La contención $S_A \subset S_B$ es inmediata, por la proposición anterior.

Sea $x \in S_B$, entonces $\forall k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $f(a_k, x) = 0$.
Sea $v \in A$, entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, tales que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k = v$. Luego

$$f(v, x) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k, x\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(a_k, x) = 0.$$

Como $v \in A$ fue arbitratio, tenemos $\forall v \in A, \quad f(a, x) = 0$. Luego $S_B \subset S_A$.

La forma general de las formas sesquilineales en $\mathbb{C}^n$

Ejercicio

Sea $f\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.

Demostrar que existe una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^n \qquad f(x, y) = y^* A x.$$

La forma general de las formas sesquilineales en $\mathbb{C}^n$

Ejercicio

Sea $f\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.

Demostrar que existe una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^n \qquad f(x,y) = y^* A x.$$

Sugerencia. Expandir x, y en la base canónica de $\mathbb{C}^n$:

$$f(x,y) = f\left(\sum_{k=1}^{n} ???\, e_k, \sum_{j=1}^{n} ???\, e_j\right) = \sum_{j,k=1}^{n} ???.$$

Plan

Formas cuadráticas asociadas a formas sesquilineales

Definición

Dada una forma sesquilineal $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$,

la forma cuadrática asociada a f se define como $q\colon H \to \mathbb{C}$,

$$q(x) := f(x, x), \qquad x \in H.$$

Formas cuadráticas asociadas a formas sesquilineales

Definición

Dada una forma sesquilineal $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$,
la forma cuadrática asociada a f se define como $q\colon H \to \mathbb{C}$,

$$q(x) := f(x,x), \qquad x \in H.$$

En lo siguiente, supondremos que $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$ será una forma sesquilineal y $q\colon H \to \mathbb{C}$ la forma cuadrática asociada.

Propiedades elementales de las formas cuadráticas

Proposición

Para cada a, b en H,

$$q(a+b) = q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b).$$

Propiedades elementales de las formas cuadráticas

Proposición

Para cada a, b en H,

$$q(a+b) = q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} q(a+b) &= f(a+b, a+b) = f(a, a+b) + f(b, a+b) \\ &= f(a,a) + f(a,b) + f(b,a) + f(b,b) \\ &= q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b). \end{aligned}$$

Identidad de Pitágoras para formas cuadráticas asociadas a formas sesquilineales

Corolario

Sean $a, b \in H$ tales que $f(a, b) = 0$ y $f(b, a) = 0$. Entonces

$$q(a + b) = q(a) + q(b).$$

Propiedades elementales de las formas cuadráticas

Proposición

Para cada a en H y cada λ en $\mathbb{C}$,

$$q(\lambda a) = |\lambda|^2 q(a).$$

Propiedades elementales de las formas cuadráticas

Proposición

Para cada a en H y cada λ en $\mathbb{C}$,

$$q(\lambda a) = |\lambda|^2 q(a).$$

Demostración. Se deja como ejercicio.

Propiedades de las formas sesquilineales

Proposición (la identidad del paralelogramo para formas sesquilineales)

Sea f una forma sesquilineal y q la forma cuadrática asociada a f. Entonces

$$q(a+b)+q(a-b)=2(q(a)+q(b)).$$

Demostración de la identidad de paralelogramo. Ya sabemos que

$$q(a+b) = q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b).$$

Demostración de la identidad de paralelogramo. Ya sabemos que

$$q(a+b)=q(a)+f(a,b)+f(b,a)+q(b).$$

Por otra parte,

$$q(a-b)=f(a-b,a-b)=q(a)-f(a,b)-f(b,a)+q(b).$$

Demostración de la identidad de paralelogramo. Ya sabemos que

$$q(a+b) = q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b).$$

Por otra parte,

$$q(a-b) = f(a-b, a-b) = q(a) - f(a,b) - f(b,a) + q(b).$$

Luego, sumando estas dos igualdades obtenemos

$$\begin{aligned} q(a+b) + q(a-b) &= q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b) \\ &\quad + q(a) - f(a,b) - f(b,a) + q(b) \\ &= 2(q(a) + q(b)). \end{aligned}$$

Lema

$$\sum_{k=0}^{3} i^{pk} = \begin{cases} 4, & \text{si } p = 0; \\ 0, & \text{si } p \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

Demostración. Si $p = 0$, entonces

$$\sum_{k=0}^{3} i^{pk} = \sum_{k=0}^{3} 1 = 4.$$

Lema

$$\sum_{k=0}^{3} i^{pk} = \begin{cases} 4, & \text{si } p = 0; \\ 0, & \text{si } p \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

Demostración. Si $p = 0$, entonces

$$\sum_{k=0}^{3} i^{pk} = \sum_{k=0}^{3} 1 = 4.$$

Ahora, si $p \in \{1, 2, 3\}$, consideremos primero que $p = 2$, entonces

$$\sum_{k=0}^{3} i^{2k} = 1 + i^2 + i^4 + i^6 = 0$$

luego, consideremos que $p \in \{1, 3\}$

$$\sum_{k=0}^{3} i^{pk} = 1 \pm i - 1 \mp i = 0$$

Proposición (la identidad de polarización para formas sesquilineales)

Sea f una forma sesquilineal y q la forma cuadrática asociada a f. Sean $a, b \in H$. Entonces

$$f(a,b) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k q(a + i^k b).$$

Proposición (la identidad de polarización para formas sesquilineales)

Sea f una forma sesquilineal y q la forma cuadrática asociada a f. Sean $a, b \in H$. Entonces

$$f(a,b) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k q(a + i^k b).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} q(a + i^k b) &= f(a + i^k b, a + i^k b) = f(a,a) + \overline{i^k} f(a,b) + i^k f(b,a) + i^k \overline{i^k} f(b,b) \\ &= q(a) + \overline{i^k} f(a,b) + i^k f(b,a) + q(b). \end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$q(a + i^k b) = q(a) + \overline{i^k} f(a, b) + i^k f(b, a) + q(b).$$

Multiplicando por i^k,

$$i^k q(a + i^k b) = i^k q(a) + f(a, b) + i^{2k} f(b, a) + i^k q(b).$$

Sumando sobre k,

$$\sum_{k=0}^{3} i^k q(a + i^k b) = \sum_{k=0}^{3} (i^k q(a) + f(a, b) + i^{2k} f(b, a) + i^k q(b)) = 4f(a, b).$$