Desigualdad de Schwarz

Luis Alberto De la O Moya, Egor Maximenko,
Enrique Abdeel Muñoz de la Colina, Elisa Suárez Barraza

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

14 de diciembre de 2020

Plan

Contenido

Objetivos

Dado un espacio vectorial complejo H con producto interno, demostrar la desigualdad de Schwarz:

$$\forall a, b \in H \qquad |\langle a, b\rangle|^2 \leq \langle a, a\rangle \langle b, b\rangle.$$

Encontrar una condición necesaria y suficiente para la igualdad

$$|\langle a, b\rangle|^2 = \langle a, a\rangle \langle b, b\rangle.$$

Algunas aplicaciones prontas

- Demostrar la propiedad subaditiva de la norma asociada al producto interno.
- Demostrar la continuidad del producto interno (como función $H \times H \to \mathbb{C}$).
- En particular, dado a en H, demostrar que

$$\varphi_a \colon H \to \mathbb{C}, \qquad \varphi_a(x) \coloneqq \langle x, a \rangle,$$

es un funcional lineal continuo.

Prerrequisitos

- Productos internos en espacios vectoriales complejos.
- La identidad de Pitágoras para el producto interno.
- Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio unidimensional.

Plan

Proposición (sobre el complemento ortogonal de un subespacio unidimensional, repaso)

Sea $a \in H$. Entonces
$$\operatorname{lin}(a)^{\perp} = \{a\}^{\perp}.$$

Demostración de $\supseteq$.

Sea $x \perp a$. Demostremos que $x \perp \operatorname{lin}(a)$.

Para cada y en $\operatorname{lin}(a)$, encontramos λ en $\mathbb{C}$ tal que $y = \lambda a$, y obtenemos

$$\langle x, y\rangle = \langle x, \lambda a\rangle = \overline{\lambda}\,\langle x, a\rangle = 0.$$

Proposición (sobre el complemento ortogonal en la proyección sobre una recta)

Sean $a, b \in H$, $a \neq 0_H$. Pongamos

$$w = b - \frac{\langle b, a \rangle}{\langle a, a \rangle}\, a.$$

Entonces $w \perp \operatorname{lin}(a)$.

Demostración. Por las propiedades del producto interno,

$$\langle w, a \rangle = \langle b, a \rangle - \frac{\langle b, a \rangle}{\langle a, a \rangle} \langle a, a \rangle = 0.$$

Luego $w \in \{a\}^{\perp} = \operatorname{lin}(a)^{\perp}$.

Teorema de Pitágoras para espacios con producto interno, repaso

Proposición

Sean $u, w \in H$ tales que $u \perp w$. Entonces

$$\langle u + w, u + w\rangle = \langle u, u\rangle + \langle w, w\rangle.$$

Demostración. Recordamos que

$$\langle u + w, u + w\rangle = \langle u, u\rangle + 2\,\mathrm{Re}(\langle u, w\rangle) + \langle w, w\rangle.$$

La suposición $u \perp w$ significa que $\langle u, w\rangle = 0$, y se obtiene el resultado requerido.

Comparación de la hipotenusa con un cateto en un triángulo rectángulo

Corolario (comparación de la hipotenusa con el cateto en un triángulo rectángulo)

Sean $u, w \in H$ tales que $u \perp w$. Entonces

$$\langle u + w, u + w \rangle \geq \langle u, u \rangle.$$

Demostración. Por la proposición anterior sabemos que dados $u, w \in H$ tales que $u \perp w$, entonces

$$\langle u + w, u + w \rangle = \langle u, u \rangle + \langle w, w \rangle.$$

Si $u \neq 0$ y $w \neq 0$,

$$\langle u + w, u + w \rangle = \langle u, u \rangle + \langle w, w \rangle > \langle u, u \rangle.$$

Plan

Desigualdad de Schwarz

Teorema

Sean $a, b \in H$. Entonces
$$|\langle a, b\rangle|^2 \leq \langle a, a\rangle \langle b, b\rangle.$$

Desigualdad de Schwarz

Teorema

Sean $a, b \in H$. Entonces
$$|\langle a, b\rangle|^2 \leq \langle a, a\rangle \langle b, b\rangle.$$

En el caso $H = \mathbb{R}^n$ o $H = \mathbb{C}^n$, fue encontrada por Augustin Louis Cauchy.

Desigualdad de Schwarz

Teorema

Sean $a, b \in H$. Entonces
$$|\langle a, b\rangle|^2 \leq \langle a, a\rangle \langle b, b\rangle.$$

En el caso $H = \mathbb{R}^n$ o $H = \mathbb{C}^n$, fue encontrada por Augustin Louis Cauchy.

Viktor Yakovlevich Bunyakovsky notó que se puede generalizar al producto interno definido mediante la integal.

Desigualdad de Schwarz

Teorema

Sean $a, b \in H$. Entonces

$$|\langle a, b\rangle|^2 \leq \langle a, a\rangle \langle b, b\rangle.$$

En el caso $H = \mathbb{R}^n$ o $H = \mathbb{C}^n$, fue encontrada por Augustin Louis Cauchy.

Viktor Yakovlevich Bunyakovsky notó que se puede generalizar al producto interno definido mediante la integal.

Karl Hermann Amandus Schwarz propuso una demostración para la situación general.

Demostración, caso trivial

Queremos demostrar que

$$|\langle a, b\rangle|^2 \leq \langle a, a\rangle \langle b, b\rangle.$$

Si $a = 0_H$, entonces ambos lados de son cero, y la afirmación se cumple.

Demostración, caso principal

Supongamos que $a \neq 0_H$. Sea $u := P_a(b)$ es decir, la proyección ortogonal de b sobre a y w como un elemento del complemento ortogonal correspondiente:

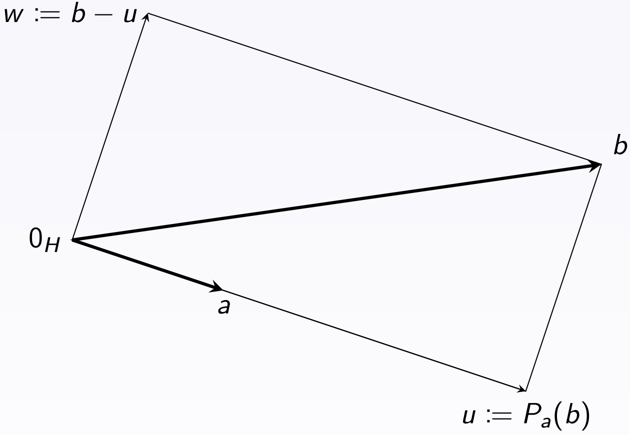
$$u := P_a(b) = \frac{\langle b, a\rangle}{\langle a, a\rangle} a, \qquad w := b - u.$$

Entonces $u \in \operatorname{lin}(a)$ y $w \in \operatorname{lin}(a)^\perp$, por eso $u \perp w$. Aplicamos el corolario del teorema de Pitágoras sobre la comparación de un cateto con la hipotenusa:

$$\langle b, b\rangle \geq \langle u, u\rangle = \langle P_a(b), P_a(b)\rangle = \left(\frac{|\langle b, a\rangle|}{\langle a, a\rangle}\right)^2 \langle a, a\rangle = \frac{|\langle a, b\rangle|^2}{\langle a, a\rangle}.$$

Multiplicamos la desigualdad obtenida por $\langle a, a\rangle$ y llegamos al resultado requerido.

El sentido geométrico de la desigualdad de Schwarz



La longitud del cateto $u = P_a b$ es menor o igual a la longitud de la hipotenusa b.

Plan

Ejemplo de aplicación de la desigualdad de Schwarz

Teorema (Generalización de Schur de la desigualdad de Hilbert)

Sean $a_m,\ b_n \in \mathbb{C}^N$ y $0 < \alpha < 1$.Entonces

$$\left| \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{a_m b_n}{m+n-\alpha} \right| \leq \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \left(\sum_{m=1}^{N} |a_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{N} |b_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ejemplo de aplicación de la desigualdad de Schwarz

Teorema (Generalización de Schur de la desigualdad de Hilbert)

Sean $a_m,\ b_n \in \mathbb{C}^N$ y $0 < \alpha < 1$.Entonces

$$\left| \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{a_m b_n}{m+n-\alpha} \right| \leq \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \left(\sum_{m=1}^{N} |a_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{N} |b_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para la demostración se necesitara del siguiente lema.

Ejemplo de aplicación de la desigualdad de Schwarz

Lema

Sean $c_k \in \mathbb{C}$, $\lambda_k \in \mathbb{Z}$ y $0 < \alpha < 1$. Entonces

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k x} \right| \mathrm{d}x \geq 2 \sin\left(\pi\alpha\right) \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{\lambda_k - \alpha} \right| .$$

Ejemplo de aplicación de la desigualdad de Schwarz

Demostración del lema. Comenzamos con la estimación

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k x} \right| \mathrm{d}x &\geq \left| \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i(\lambda_k-\alpha)x} \mathrm{d}x \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{n} c_k \int_0^{2\pi} e^{i(\lambda_k-\alpha)x} \mathrm{d}x \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{\lambda_k-\alpha} \int_0^{2\pi(\lambda_k-\alpha)} e^{iu} \mathrm{d}u \right| .
\end{aligned}$$

Ejemplo de aplicación de la desigualdad de Schwarz

Demostración del lema. Comenzamos con la estimación

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k x}\right|\mathrm{d}x &\geq \left|\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{n} c_k e^{i(\lambda_k-\alpha)x}\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\sum_{k=1}^{n} c_k \int_0^{2\pi} e^{i(\lambda_k-\alpha)x}\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{\lambda_k-\alpha}\int_0^{2\pi(\lambda_k-\alpha)} e^{iu}\mathrm{d}u\right|.\end{aligned}$$

Pero el módulo de la última integral depende solo de α:

Ejemplo de aplicación de la desigualdad de Schwarz

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi(\lambda_k-\alpha)} e^{iu}\mathrm{d}u &= -ie^{iu}\Big|_0^{2\pi(\lambda_k-\alpha)} \\ &= -i\left[e^{i2\pi(\lambda_k-\alpha)}-1\right] = -i\left[e^{i2\pi\alpha}-1\right] \\ &= -ie^{-i\pi\alpha}\left[e^{-i\pi\alpha}-e^{i\pi\alpha}\right] = -2e^{-i\pi\alpha}\sin\left(\pi\alpha\right).\end{aligned}$$

Ejemplo de aplicación de la desigualdad de Schwarz

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi(\lambda_k-\alpha)} e^{iu}\mathrm{d}u &= -ie^{iu}\big|_0^{2\pi(\lambda_k-\alpha)} \\ &= -i\left[e^{i2\pi(\lambda_k-\alpha)}-1\right] = -i\left[e^{i2\pi\alpha}-1\right] \\ &= -ie^{-i\pi\alpha}\left[e^{-i\pi\alpha}-e^{i\pi\alpha}\right] = -2e^{-i\pi\alpha}\sin(\pi\alpha).\end{aligned}$$

Así,

$$\left|\int_0^{2\pi(\lambda_k-\alpha)} e^{iu}\mathrm{d}u\right| = 2\sin(\pi\alpha),$$

y se obtiene el resultado.

Demostración del teorema

Aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} a_m e^{imx} b_n e^{inx}\right| \mathrm{d}x \leq \left(\sum_{m=1}^{N}|a_m|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{N}|b_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demostración del teorema

Aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} a_m e^{imx} b_n e^{inx}\right| \mathrm{d}x \leq \left(\sum_{m=1}^{N}|a_m|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{N}|b_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por otro lado, usando el lema con $c_k = a_m b_n$ y $\lambda_k = m + n$, tenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} a_m e^{imx} b_n e^{inx}\right| \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} a_m b_n e^{i(n+m)x}\right| \mathrm{d}x$$

$$\geq \frac{1}{2\pi} 2\sin(\pi\alpha)\left|\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{a_m b_n}{n+m-\alpha}\right|.$$

Juntando ambas desigualdades se tiene el resultado.

Plan

El caso de igualdad

Proposición

Sean $a, b \in H$. Entonces la igualdad

$$|\langle a, b\rangle|^2 = \langle a, a\rangle \langle b, b\rangle$$

se cumple si, y sólo si, los vectores a y b son linealmente dependientes.

Demostración

En el caso trivial $a = 0_H$ la afirmación es correcta. Consideremos el caso $a \neq 0_H$.

Demostración

En el caso trivial $a = 0_H$ la afirmación es correcta. Consideremos el caso $a \neq 0_H$. Supongamos que se cumple la igualdad. Usando la misma notación que en la demostración del teorema, por la identidad de Pitágoras tendremos

$$\langle u + w, u + w \rangle = \langle b, b \rangle = \left(\frac{|\langle a, b \rangle|}{\langle a, a \rangle} \right)^2 \langle a, a \rangle + \langle w, w \rangle,$$

Demostración

En el caso trivial $a = 0_H$ la afirmación es correcta. Consideremos el caso $a \neq 0_H$. Supongamos que se cumple la igualdad. Usando la misma notación que en la demostración del teorema, por la identidad de Pitágoras tendremos

$$\langle u + w, u + w \rangle = \langle b, b \rangle = \left(\frac{|\langle a, b \rangle|}{\langle a, a \rangle} \right)^2 \langle a, a \rangle + \langle w, w \rangle,$$

$$\langle b, b \rangle = \langle b, b \rangle + \langle w, w \rangle,$$

Demostración

En el caso trivial $a = 0_H$ la afirmación es correcta. Consideremos el caso $a \neq 0_H$. Supongamos que se cumple la igualdad. Usando la misma notación que en la demostración del teorema, por la identidad de Pitágoras tendremos

$$\langle u + w, u + w\rangle = \langle b, b\rangle = \left(\frac{|\langle a, b\rangle|}{\langle a, a\rangle}\right)^2 \langle a, a\rangle + \langle w, w\rangle,$$

$$\langle b, b\rangle = \langle b, b\rangle + \langle w, w\rangle,$$

$$0 = \langle w, w\rangle \implies w = 0.$$

Por lo tanto, $b = \lambda a$, con $\lambda = \frac{\langle a,b\rangle}{\langle a,a\rangle}$.

Supongamos que a y b son linealmente dependientes. Como $a \neq 0_H$, esto significa que $b \in \text{lin}(a)$. Sea $\gamma \in \mathbb{C}$ tal que $b = \gamma a$.

Supongamos que a y b son linealmente dependientes. Como $a \neq 0_H$, esto significa que $b \in \text{lin}(a)$. Sea $\gamma \in \mathbb{C}$ tal que $b = \gamma a$. Entonces

$$|\langle a, b\rangle|^2 = |\langle a, \gamma a\rangle|^2 = |\overline{\gamma}|^2 |\langle a, a\rangle|^2$$

Supongamos que a y b son linealmente dependientes. Como $a \neq 0_H$, esto significa que $b \in \text{lin}(a)$. Sea $\gamma \in \mathbb{C}$ tal que $b = \gamma a$. Entonces

$$|\langle a, b\rangle|^2 = |\langle a, \gamma a\rangle|^2 = |\overline{\gamma}|^2 |\langle a, a\rangle|^2$$

Por otro lado,

$$\langle a, a\rangle\langle b, b\rangle = \langle a, a\rangle\langle \gamma a, \gamma a\rangle = |\gamma|^2 |\langle a, a\rangle|^2.$$

Ejercicio

Sea L^2 con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) \, \mathrm{d}t,$$

sea $f \in L^2$ y sea $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(nt) \right)^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) \, \mathrm{d}t.$$