Fórmula recursiva de Danielson y Lanczos para la transformada finita de Fourier

Objetivos. Demostrar la fórmula de Danielson y Lanczos, conocida también como el lema de Danielson y Lanczos, que permite expresar las entradas del vector $F_{2m}x$ en términos de las entradas de los vectores $F_m y$ y $F_m z$, donde $y, z \in \mathbb{C}^m$.

Requisitos. Transformada finita de Fourier, propiedades de las raíces de la unidad.

Lema 1. *Sean $p, q \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$. Entonces,*

$$\omega_{pq}^{pm} = \omega_q^m. \tag{1}$$

Demostración.

$$\omega_{pq}^{pm} = \exp\left(-\frac{2\pi \operatorname{i} pm}{pq}\right) = \exp\left(-\frac{2\pi \operatorname{i} m}{q}\right) = \omega_q^m. \qquad \square$$

Proposición 2 (fórmula de Danielson y Lanczos)**.** *Sean $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{C}^{2m}$. Definimos $y, z \in \mathbb{C}^m$ como*

$$y_k \coloneqq x_{2k}, \qquad z_k \coloneqq z_{2k+1} \qquad (0 \le k < m).$$

Entonces, para cada j en $\{0, \ldots, m-1\}$,

$$\begin{aligned} (F_{2m}x)_j &= (F_m y)_j + \omega_{2m}^j (F_m z)_j, \\ (F_{2m}x)_{m+j} &= (F_m y)_j - \omega_{2m}^j (F_m z)_j. \end{aligned} \tag{2}$$

Demostración. Recordamos la definicion de $F_n x$ para $n = 2m$:

$$(F_{2m}x)_j = \sum_{q=0}^{2m-1} \omega_{2m}^{jq} x_q.$$

El conjunto de índices de la suma es $\{0, \ldots, 2m-1\}$. Lo partimos en dos subconjuntos: los índices pares y los índices impares.

$$\{0, \ldots, 2m-1\} = \{2k\colon\ 0 \le k < m\} \cup \{2k+1\colon\ 0 \le k < m\}.$$

La suma se parte en dos sumas:

$$(F_{2m}x)_j = \sum_{k=0}^{m-1} \omega_{2m}^{2jk} x_{2k} + \sum_{k=0}^{m-1} \omega_{2m}^{j(2k+1)} x_{2k+1} = \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{jk} y_k + \omega_{2m}^j \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{jk} z_k.$$

Si $0 \le j < m$, entonces las últimas sumas se pueden escribir como $(F_m y)_j$ y $(F_m z)_j$, y con esto obtenemos el primer caso de la fórmula (2).

Para $j \ge m$ tenemos que hacer otra transformación de índices. Sustituimos j por $m+j$ y usamos el hecho que $\omega_{2m}^m = -1$:

$$(F_{2m}x)_{m+j} = \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{mk} \omega_m^{jk} y_k + \omega_{2m}^m \omega_{2m}^j \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{mk} \omega_m^{jk} z_k = (F_m y)_j - \omega_{2m}^j (F_m z)_j. \qquad \square$$