Sucesiones de Cauchy

Objetivos. Definir el concepto de sucesiones de Cauchy. Describir sucesiones de Cauchy en términos del medidor de Cauchy.

Prerrequisitos. Espacios métricos, sucesiones convergentes.

1 Definición (sucesión de Cauchy)**.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe k en $\mathbb{N}$ tal que para cualesquiera m, n en $\mathbb{N}$ con $m, n \geq k$ se cumple la desigualdad $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

2 Proposición (cada sucesión convergente es de Cauchy)**.** *Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y a un punto de X tales que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.*

3 Definición (sucesión regular de Cauchy)**.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es *regular de Cauchy* si para cada n en $\mathbb{N}$ se cumple la desigualdad $d(x_n, x_{n+1}) \leq 2^{-n-1}$.

4 Proposición. *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en X. Entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.*

El medidor de Cauchy de una sucesión

El concepto del medidor de Cauchy de una sucesión no es común en la bibliografía (de hecho, este concepto está inventado o reinventado por el autor de estos apuntes), pero este concepto técnico simplifica algunos razonamientos, disminuyendo el número de variables y cuantificadores. Un papel similar hace el módulo de continuidad de una función.

5 Definición (el medidor de Cauchy de una sucesión)**.** Dada una sucesión $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en (X, d), pongamos

$$\gamma_a(n) \coloneqq \sup_{j,k\geq n} d(a_j, a_k) = \operatorname{diam}(\{a_k \colon\ k \geq n\}).$$

6 Proposición (el medidor de Cauchy de una sucesión es una sucesión decreciente)**.** *Sea $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d). Entonces la sucesion $\gamma_a = (\xi_a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, esto es,*

$$\gamma_a(n+1) \leq \gamma_a(n) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Demostración. Primero notamos que la cola de la sucesión que empieza con el índice $n+1$ está contenida en la cola que empieza con el índice n:

$$\{a_j : j \geq n+1\} \subseteq \{a_j : j \geq n\}.$$

Sacando los diámetros de los conjuntos en ambos lados, obtenemos la desigualdad requerida. □

7 Ejemplo. Calculemos γ_a para la sucesión $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dada por

$$a_k = \frac{1}{k}.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Dados $j, k \geq n$, consideremos el caso $j \leq k$. Entonces

$$d(a_j, a_k) = |a_j - a_k| = \left|\frac{1}{j} - \frac{1}{k}\right| = \frac{1}{j} - \frac{1}{k} < \frac{1}{j} \leq \frac{1}{n}.$$

Esto implica que $\gamma_a(n) \leq \frac{1}{n}$. Por otro lado, para cada $k \geq n$ tenemos

$$\gamma_a(n) \geq d(a_n, a_k) = \frac{1}{n} - \frac{1}{k}.$$

Pasando al límite cuando k tiende a infinito, obtenemos que $\xi_a(n) \geq \frac{1}{n}$. Respuesta final:

$$\gamma_a(n) = \frac{1}{n}.$$

8 Ejercicio. Calcular γ_a para la sucesión $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dada por $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$.

9 Ejercicio. Calcular γ_a para la sucesión $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dada por $a_k = (-1)^k$.

10 Proposición. *$(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy si, y sólo si, $\gamma_a(n) \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

Demostración. Demostremos solamente la suficiencia (la necesidad se deja como un ejercicio). Supongamos que $\xi_a(n) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Demostremos que la sucesión $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$. Usando la suposición encontramos n en $\mathbb{N}$ tal que para cada $m \geq n$ se cumple $\gamma_a(m) < \varepsilon$. En particular, $\gamma_a(n) < \varepsilon$. □