Sucesiones de Cauchy y espacios métricos completos (un tema de la unidad “Espacios métricos”)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

31 de agosto de 2022

Objetivos.

- Conocer o repasar el concepto de sucesiones de Cauchy.
- Demostrar un criterio de sucesión de Cauchy en términos del “medidor de Cauchy”.
- Definir o repasar el concepto de espacios métricos completos.

Prerrequisitos.

- Espacios métricos.
- Sucesiones convergentes.
- El diámetro de un conjunto.

Contenido

Sucesión de Cauchy

En este tema suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

Sucesión de Cauchy

En este tema suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

Definición (sucesión de Cauchy)

Sea $a \in X^{\mathbb{N}}$. Se dice que a es una sucesión de Cauchy, si

Sucesión de Cauchy

En este tema suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

Definición (sucesión de Cauchy)

Sea $a \in X^{\mathbb{N}}$. Se dice que a es una sucesión de Cauchy, si

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \forall m \geq k \qquad \forall n \geq k \qquad d(a_m, a_n) < \varepsilon.$$

Sucesión de Cauchy

En este tema suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

Definición (sucesión de Cauchy)

Sea $a \in X^{\mathbb{N}}$. Se dice que a es una sucesión de Cauchy, si

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \forall m \geq k \qquad \forall n \geq k \qquad d(a_m, a_n) < \varepsilon.$$

Otros términos equivalentes: sucesión fundamental, sucesión convergente en si.

Pasar de la desigualdad estricta a la desigualdad inestricta

Ejercicio. Demostrar que a es de Cauchy si, y sólo si,

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \forall m \geq k \qquad \forall n \geq k \qquad d(a_m, a_n) \leq \varepsilon.$$

La idea principal en forma breve

Ya sabemos que $a \in X^{\mathbb{N}}$ es de Cauchy si, y sólo si,

La idea principal en forma breve

Ya sabemos que $a \in X^{\mathbb{N}}$ es de Cauchy si, y sólo si,

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \forall m \geq k \qquad \forall n \geq k \qquad d(a_m, a_n) \leq \varepsilon.$$

La idea principal en forma breve

Ya sabemos que $a \in X^{\mathbb{N}}$ es de Cauchy si, y sólo si,

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \forall m \geq k \qquad \forall n \geq k \qquad d(a_m, a_n) \leq \varepsilon.$$

Agrupamos los últimos cuantificadores:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \Bigl(\forall m \geq k \qquad \forall n \geq k \qquad d(a_m, a_n) \leq \varepsilon\Bigr).$$

La idea principal en forma breve

Ya sabemos que $a \in X^{\mathbb{N}}$ es de Cauchy si, y sólo si,

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \forall m \geq k \qquad \forall n \geq k \qquad d(a_m, a_n) \leq \varepsilon.$$

Agrupamos los últimos cuantificadores:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \Big(\forall m \geq k \qquad \forall n \geq k \qquad d(a_m, a_n) \leq \varepsilon\Big).$$

La condición dentro del paréntesis se caracteriza en términos del supremo:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \sup_{m,n \geq k} d(a_m, a_n) \leq \varepsilon.$$

Definición: las colas de una sucesión

Definición

Sea $a \in X^{\mathbb{N}}$ y sea k en $\mathbb{N}$.

Decimos que el siguiente conjunto es la *k-ésima cola de la sucesión*:

$$\{a_n : \; n \in \mathbb{N}, \; n \geq k\}.$$

Las colas de una sucesión forman una sucesión de conjuntos decreciente

Ejercicio. Sea $a \in X^{\mathbb{N}}$. Para cada k en $\mathbb{N}$, denotemos por A_k la k-ésima cola de esta sucesión:

$$A_k := \{a_n \colon\ n \in \mathbb{N},\ n \geq k\}.$$

Demostrar que para cada k en $\mathbb{N}$ se cumple la contención

$$A_{k+1} \subseteq A_k.$$

Las colas de una sucesión forman una sucesión de conjuntos decreciente

Ejercicio. Sea $a \in X^{\mathbb{N}}$. Para cada k en $\mathbb{N}$, denotemos por A_k la k-ésima cola de esta sucesión:

$$A_k := \{a_n : \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq k\}.$$

Demostrar que para cada k en $\mathbb{N}$ se cumple la contención

$$A_{k+1} \subseteq A_k.$$

Sugerencia: mostrar que

$$A_k = \{a_k\} \cup A_{k+1}.$$

El medidor de Cauchy de una sucesión

Definición

Sea $a \in X^{\mathbb{N}}$. Definimos $\gamma_a \colon \mathbb{N} \to [0, +\infty]$,

$$\gamma_a(k) \coloneqq \sup_{m,n \geq k} d(a_m, a_n).$$

El medidor de Cauchy de una sucesión

Definición

Sea $a \in X^{\mathbb{N}}$. Definimos $\gamma_a \colon \mathbb{N} \to [0, +\infty]$,

$$\gamma_a(k) := \sup_{m,n \geq k} d(a_m, a_n).$$

En otras palabras,

$$\gamma_a(k) = \operatorname{diam}\{a_n \colon \ n \geq k\}.$$

El medidor de Cauchy de una sucesión

Definición

Sea $a \in X^{\mathbb{N}}$. Definimos $\gamma_a \colon \mathbb{N} \to [0, +\infty]$,

$$\gamma_a(k) := \sup_{m,n \geq k} d(a_m, a_n).$$

En otras palabras,

$$\gamma_a(k) = \operatorname{diam}\{a_n \colon \ n \geq k\}.$$

Egor Maximenko: tuve que introducir este concepto porque me parece muy natural y útil.

No recuerdo haber visto este concepto en la bibliografía.

Si lo han visto, les pido darme una referencia.

El medidor de Cauchy es una sucesión decreciente

Ejercicio.

Sea $a \in X^{\mathbb{N}}$. Demostrar que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \gamma_a(k+1) \leq \gamma_a(k).$$

Criterio de sucesión de Cauchy en términos del medidor de Cauchy

Proposición

Sea $a \in X^{\mathbb{N}}$. Entonces a es de Cauchy si, y sólo si, $\gamma_a(k) \to 0$ cuando $k \to \infty$.

Criterio de sucesión de Cauchy en términos del medidor de Cauchy

Proposición

Sea $a \in X^{\mathbb{N}}$. Entonces a es de Cauchy si, y sólo si, $\gamma_a(k) \to 0$ cuando $k \to \infty$.

Demostración: ejercicio.

Una condición suficiente para que una sucesión no se de Cauchy

Ejercicio.
Sea $a \in X^{\mathbb{N}}$ y sea $\eta > 0$ tales que

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{m\} \qquad d(a_m, a_n) \geq \eta.$$

Demostrar que la sucesión a no es de Cauchy.

Cada sucesión convergente es de Cauchy

Proposición

Sea $a \in X^{\mathbb{N}}$ y sea $b \in X$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b.$$

Entonces a es una sucesión de Cauchy.

Cada sucesión convergente es de Cauchy

Proposición

Sea $a \in X^{\mathbb{N}}$ y sea $b \in X$ tales que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = b.$$

Entonces a es una sucesión de Cauchy.

Ejercicio: demostrar la proposición.

Espacios métricos completos

Definición

Un espacio métrico se llama completo, si cada sucesión de Cauchy en este espacio converge.

Espacios métricos completos

Definición

Un espacio métrico se llama completo, si cada sucesión de Cauchy en este espacio converge.

En otras palabras, se pide que para cada a en $X^{\mathbb{N}}$, si a es de Cauchy, entonces existe b en X tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b.$$

El espacio métrico $\mathbb{Q}$ no es completo, demostración que utiliza $\mathbb{R}$

Ejercicio.
Demostrar que el espacio $\mathbb{Q}$ no es completo, usando elementos de la teoría de números reales y el hecho que existen números irracionales.

El espacio métrico $\mathbb{Q}$ no es completo, demostración "intrínseca"

Demostrar que el espacio $\mathbb{Q}$ no es completo, sin utilizar la teoría de números reales.

El espacio métrico $\mathbb{Q}$ no es completo, demostración “intrínseca”

Demostrar que el espacio $\mathbb{Q}$ no es completo, sin utilizar la teoría de números reales.

En la definición de sucesión de Cauchy se puede trabajar con ε racional estrictamente positivo.

El espacio métrico $\mathbb{Q}$ no es completo, demostración "intrínseca"

Demostrar que el espacio $\mathbb{Q}$ no es completo, sin utilizar la teoría de números reales.

En la definición de sucesión de Cauchy se puede trabajar con ε racional estrictamente positivo.

Por ejemplo, considerar la sucesión a definida de la siguiente manera recursiva:

$$a_1 := 2, \qquad a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right).$$

- Demostrar que $a_n \in \mathbb{Q}$ para cada n en $\mathbb{N}$.
- Demostrar que a es de Cauchy.
- Demostrar que si b es el límite de esta sucesión, entonces $b > 0$ y $b^2 = 2$.
- Demostrar que no existe ningún número racional b con estas propiedades.