Sucesiones de Cauchy y espacios métricos completos

Objetivos. Definir el concepto de sucesiones de Cauchy. Describir sucesiones de Cauchy en términos del medidor de Cauchy. Definir el concepto de espacios métricos.

Prerrequisitos. Espacios métricos, sucesiones convergentes, el diámetro de un conjunto.

En este tema suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

1 Definición (sucesión de Cauchy)**.** Sea $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Se dice que a es una *sucesión de Cauchy*, si para cada $\varepsilon > 0$ existe k en $\mathbb{N}$ tal que para cualesquiera m, n en $\mathbb{N}$ con $m, n \geq k$ se cumple la desigualdad $d(a_m, a_n) < \varepsilon$.

De manera formal, a es de Cauchy, si satisface la siguiente condición:

$$\forall\varepsilon > 0 \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \forall m \geq k \qquad \forall n \geq k \qquad d(a_m, a_n) < \varepsilon. \tag{1}$$

Otros términos equivalentes: *sucesión fundamental*, *sucesión convergente en si.*

2 Ejercicio. Demostrar que a es de Cauchy si, y solo si,

$$\forall\varepsilon > 0 \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \forall m \geq k \qquad \forall n \geq k \qquad d(a_m, a_n) \leq \varepsilon. \tag{2}$$

Descripción de sucesiones de Cauchy en términos de los diámetros de las colas

La condición (1) es complicada porque contiene 4 cuantificadores. Para simplificar el trabajo, introducimos algunos objetos auxiliares.

3 Definición (las colas de una sucesión)**.** Sea $a \in X^{\mathbb{N}}$ y sea k en $\mathbb{N}$. Entonces decimos que el siguiente conjunto es la k-ésima cola de la sucesión:

$$\big\{a_n\colon\ n \in \mathbb{N},\ n \geq k\big\}.$$

4 Ejercicio (las colas de una sucesión forman una sucesión de conjuntos decreciente)**.** Sea $a \in X^{\mathbb{N}}$. Para cada k en $\mathbb{N}$, denotemos por A_k la k-ésima cola de esta sucesión:

$$A_k \coloneqq \big\{a_n\colon\ n \in \mathbb{N},\ n \ge k\big\}.$$

Demostrar que para cada k en $\mathbb{N}$ se cumple la contención

$$A_{k+1} \subseteq A_k.$$

5 Definición (el medidor de Cauchy de una sucesión)**.** Dada una sucesión $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X, definimos $\gamma_a\colon \mathbb{N} \to [0, +\infty]$ mediante la regla

$$\gamma_a(k) \coloneqq \sup_{m,n\ge k} d(a_m, a_n).$$

En otras palabras,

$$\gamma_a(k) = \operatorname{diam}\big\{a_n\colon\ n \ge k\big\}.$$

Egor Maximenko. El concepto del medidor de Cauchy de una sucesión no es común en la bibliografía. No recuerdo si lo inventé por mi propia cuenta o encontré en algún texto. Sin embargo, este concepto es muy natural y simplifica algunos razonamientos con sucesiones de Cauchy, disminuyendo el número de variables y cuantificadores. Un papel similar hace el medidor de continuidad uniforme de una función (conocido también como el módulo de continuidad).

6 Proposición (el medidor de Cauchy de una sucesión es una sucesión decreciente)**.** *Sea $a \in X^{\mathbb{N}}$. Entonces la sucesion γ_a es decreciente:*

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \gamma_a(k+1) \le \gamma_a(k).$$

Demostración. Se sigue del resultado del Ejercicio 4 y de la propiedad creciente del diámetro. □

7 Ejemplo. Calculemos γ_a para la sucesión a dada por

$$a_k = \frac{1}{k}.$$

Sea $k \in \mathbb{N}$. Dados $p, q \ge k$, consideremos el caso $p \le q$. Entonces

$$d(a_p, a_q) = |a_p - a_q| = \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right| = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{1}{p} \le \frac{1}{k}.$$

Esto implica que $\gamma_a(k) \le \frac{1}{k}$. Por otro lado, para cada $p \ge k$ tenemos

$$\gamma_a(k) \ge d(a_k, a_p) = \frac{1}{k} - \frac{1}{p}.$$

Pasando al límite cuando p tiende a infinito, obtenemos que $\gamma_a(k) \ge \frac{1}{k}$. Respuesta final:

$$\gamma_a(k) = \frac{1}{k}.$$

8 Ejercicio. Calcular γ_a para la sucesión $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dada por $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$.

9 Proposición (criterio de sucesión de Cauchy en términos del medidor de Cauchy)**.** *Sea $a \in X^{\mathbb{N}}$. Entonces a es de Cauchy si, y sólo si, $\gamma_a(k) \to 0$ cuando $k \to \infty$.*

Idea de demostración. Notamos que la condición (2) es equivalente a la siguiente condición:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \sup_{m,n \ge k} d(a_m, n) \le \varepsilon,$$

esto es,

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \gamma_a(k) \le \varepsilon.$$

Como γ_a es una sucesión decreciente, la última condición es equivalente a la condición que $\gamma_a \to 0$. □

10 Ejercicio. Sea $a \in X^{\mathbb{N}}$ y sea $\eta > 0$ tales que

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{m\} \qquad d(a_m, a_n) \ge \eta.$$

Demostrar que la sucesión a no es de Cauchy.

11 Ejemplo. En el espacio $\mathbb{R}$ consideremos la sucesión a dada por

$$a_n \coloneqq (-1)^n.$$

Para cada k en $\mathbb{N}$ tenemos

$$\gamma_a(k) \ge d(a_k, a_{k+1}) = 2.$$

Notamos que la sucesión γ_a no converge al cero. Por lo tanto, a no es de Cauchy.

Espacios métricos completos

12 Proposición (cada sucesión convergente es de Cauchy)**.** *Sea* $a \in X^{\mathbb{N}}$ *y sea* $b \in X$ *tales que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b.$$

Entonces a *es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Ejercicio. □

13 Definición (espacio métrico completo)**.** Un espacio métrico se llama *completo* si cada sucesión de Cauchy converge.

14 Ejercicio. Demostrar que el espacio $\mathbb{Q}$ no es completo, usando elementos de la teoría de números reales y el hecho que existen números irracionales.

15 Ejercicio. Demostrar que el espacio $\mathbb{Q}$ no es completo, sin utilizar la teoría de números reales (en la definición de sucesión de Cauchy se puede considerar ε como número racional estrictamente positivo). Por ejemplo, considerar la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida mediante un valor inicial y una fórmula recursiva:

$$a_1 := 2, \qquad a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right).$$

Demostrar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Demostrar que si b es el límite de esta sucesión, entonces $b > 0$ y $b^2 = 2$. Demostrar que no existe ningún número racional b con estas propiedades.