Convergencia de Cauchy en medida (un tema del curso “Análisis real”)

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

25 de mayo de 2021

Objetivos.

Introducir el concepto de convergencia de Cauchy en medida.

Relacionar este concepto con la convergencia en medida
y con la convergencia casi uniforme.

Objetivos.

Introducir el concepto de convergencia de Cauchy en medida.

Relacionar este concepto con la convergencia en medida
y con la convergencia casi uniforme.

Prerrequsitos:

- conjuntos auxiliares $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$,
- criterio de convergencia casi uniforme en términos de estos conjuntos,
- propiedad decreciente de $B(\varepsilon, k)$ respecto a ambas variables,
- propiedad σ-subaditiva de medida,
- subsucesión de una sucesión.

Plan

1. Convergencia de Cauchy en medida
2. Sucesiones regulares de Cauchy en medida
3. Teoremas principales

Conjuntos $A(\varepsilon, n)$ y $A(\varepsilon, m, n)$

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) :=$ el conjunto de todas las funciones $X \to \mathbb{C}$ que son $\mathcal{F}$-medibles.

Conjuntos $A(\varepsilon, n)$ y $A(\varepsilon, m, n)$

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.
$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) :=$ el conjunto de todas las funciones $X \to \mathbb{C}$ que son $\mathcal{F}$-medibles.

Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Conjuntos $A(\varepsilon, n)$ y $A(\varepsilon, m, n)$

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) :=$ el conjunto de todas las funciones $X \to \mathbb{C}$ que son $\mathcal{F}$-medibles.

Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Para cada $\varepsilon > 0$ y cada n en $\mathbb{N}$ definimos

$$A(\varepsilon, n) := \{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Conjuntos $A(\varepsilon, n)$ y $A(\varepsilon, m, n)$

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) :=$ el conjunto de todas las funciones $X \to \mathbb{C}$ que son $\mathcal{F}$-medibles.

Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Para cada $\varepsilon > 0$ y cada n en $\mathbb{N}$ definimos

$$A(\varepsilon, n) := \{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Para cada m, n en $\mathbb{N}$ definimos

$$A(\varepsilon, m, n) := \{x \in X\colon\ |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Los conjuntos $A(\varepsilon, n)$ y $A(\varepsilon, m, n)$ son medibles

$$A(\varepsilon, n) := \{x \in X \colon\ |f_n(x) - g(x)| \ge \varepsilon\}.$$

$$A(\varepsilon, m, n) := \{x \in X \colon\ |f_m(x) - f_n(x)| \ge \varepsilon\}.$$

Ejercicio. Demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ y cada $m, n \in \mathbb{N}$

$$A(\varepsilon, n) \in \mathcal{F}, \qquad A(\varepsilon, m, n) \in \mathcal{F}.$$

Convergencia en medida y convergencia de Cauchy en medida

Se dice que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en medida μ si

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \mu(A(\varepsilon, n)) = 0.$$

Convergencia en medida y convergencia de Cauchy en medida

Se dice que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en medida μ si

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \mu(A(\varepsilon, n)) = 0.$$

Se dice que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en medida μ si

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{m,n\to\infty} \mu(A(\varepsilon, m, n)) = 0.$$

Convergencia en medida y convergencia de Cauchy en medida

Se dice que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en medida μ si

$$\forall\varepsilon>0 \qquad \lim_{n\to\infty}\mu(A(\varepsilon,n))=0.$$

Se dice que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en medida μ si

$$\forall\varepsilon>0 \qquad \lim_{m,n\to\infty}\mu(A(\varepsilon,m,n))=0.$$

La misma condición de manera más detallada:

$$\forall\varepsilon>0 \quad \forall\delta>0 \quad \exists k\in\mathbb{N} \quad \forall m,n\geq k \quad \mu(A(\varepsilon,m,n))<\delta.$$

Una relación entre los conjuntos $A(\varepsilon, n)$ y $A(\varepsilon, m, n)$

Lema

Para cada $\varepsilon > 0$ y cada m, n en $\mathbb{N}$,

$$A(\varepsilon, m, n) \subseteq A(\varepsilon/2, m) \cup A(\varepsilon/2, n).$$

Demostración del lema

Queremos demostrar que

$$A(\varepsilon, m, n) \subseteq A(\varepsilon/2, m) \cup A(\varepsilon/2, n).$$

Demostración del lema

Queremos demostrar que

$$A(\varepsilon, m, n) \subseteq A(\varepsilon/2, m) \cup A(\varepsilon/2, n).$$

Supongamos que $x \notin A(\varepsilon/2, m) \cup A(\varepsilon/2, n)$.

Demostración del lema

Queremos demostrar que

$$A(\varepsilon, m, n) \subseteq A(\varepsilon/2, m) \cup A(\varepsilon/2, n).$$

Supongamos que $x \notin A(\varepsilon/2, m) \cup A(\varepsilon/2, n)$.
Entonces $\quad x \notin A(\varepsilon/2, m)$

Demostración del lema

Queremos demostrar que

$$A(\varepsilon, m, n) \subseteq A(\varepsilon/2, m) \cup A(\varepsilon/2, n).$$

Supongamos que $x \notin A(\varepsilon/2, m) \cup A(\varepsilon/2, n)$.
Entonces $\quad x \notin A(\varepsilon/2, m) \quad \wedge \quad x \notin A(\varepsilon/2, n)$, esto es,

$$|f_m(x) - g(x)|$$

Demostración del lema

Queremos demostrar que

$$A(\varepsilon, m, n) \subseteq A(\varepsilon/2, m) \cup A(\varepsilon/2, n).$$

Supongamos que $x \notin A(\varepsilon/2, m) \cup A(\varepsilon/2, n)$.
Entonces $\quad x \notin A(\varepsilon/2, m) \quad \wedge \quad x \notin A(\varepsilon/2, n), \quad$ esto es,

$$|f_m(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Demostración del lema

Queremos demostrar que

$$A(\varepsilon, m, n) \subseteq A(\varepsilon/2, m) \cup A(\varepsilon/2, n).$$

Supongamos que $x \notin A(\varepsilon/2, m) \cup A(\varepsilon/2, n)$.
Entonces $\quad x \notin A(\varepsilon/2, m) \quad \wedge \quad x \notin A(\varepsilon/2, n),\quad$ esto es,

$$|f_m(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \wedge \qquad |f_n(x) - g(x)|$$

Demostración del lema

Queremos demostrar que

$$A(\varepsilon, m, n) \subseteq A(\varepsilon/2, m) \cup A(\varepsilon/2, n).$$

Supongamos que $x \notin A(\varepsilon/2, m) \cup A(\varepsilon/2, n)$.
Entonces $\quad x \notin A(\varepsilon/2, m) \quad \wedge \quad x \notin A(\varepsilon/2, n)$, esto es,

$$|f_m(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \wedge \qquad |f_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Demostración del lema

Queremos demostrar que

$$A(\varepsilon, m, n) \subseteq A(\varepsilon/2, m) \cup A(\varepsilon/2, n).$$

Supongamos que $x \notin A(\varepsilon/2, m) \cup A(\varepsilon/2, n)$.
Entonces $\quad x \notin A(\varepsilon/2, m) \quad \wedge \quad x \notin A(\varepsilon/2, n), \quad$ esto es,

$$|f_m(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \wedge \qquad |f_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq$$

Demostración del lema

Queremos demostrar que

$$A(\varepsilon, m, n) \subseteq A(\varepsilon/2, m) \cup A(\varepsilon/2, n).$$

Supongamos que $x \notin A(\varepsilon/2, m) \cup A(\varepsilon/2, n)$.
Entonces $\quad x \notin A(\varepsilon/2, m) \quad \wedge \quad x \notin A(\varepsilon/2, n), \quad$ esto es,

$$|f_m(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \wedge \qquad |f_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - g(x)| + |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Si una sucesión converge en medida, entonces es de Cauchy en medida

Proposición

Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en medida μ.

Entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en medida μ.

Si una sucesión converge en medida, entonces es de Cauchy en medida

Proposición

Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en medida μ.

Entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en medida μ.

Ejercicio. Demostrar la proposición usando el lema.

Si una sucesión converge en medida, entonces es de Cauchy en medida

Proposición

Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en medida μ.
Entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en medida μ.

Ejercicio. Demostrar la proposición usando el lema.

Al final de este tema veremos que se tiene también el resultado recíproco.

Lema

Para cada $\varepsilon > 0$ y cada m, n en $\mathbb{N}$,

$$A(\varepsilon, n) \subseteq A(\varepsilon/2, m) \cup A(\varepsilon/2, m, n).$$

Ejercicio. Demostrar el lema.

Sucesión de Cauchy en medida que contiene una subsucesión convergente en medida

Proposición

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en medida μ, sea $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$ y sea $(\nu(k))_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente creciente en $\mathbb{N}$.

Supongamos que

$$f_{\nu(k)} \xrightarrow{\mu} g.$$

Entonces

$$f_n \xrightarrow{\mu} g.$$

Inicio de demostración.

Sean $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$.

Inicio de demostración.

Sean $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$.

Usando la suposición $f_{\nu(k)} \xrightarrow{\mu} g$ encontramos p_1 en $\mathbb{N}$ tal que

Inicio de demostración.

Sean $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$.

Usando la suposición $f_{\nu(k)} \xrightarrow{\mu} g$ encontramos p_1 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \geq p_1$$

Inicio de demostración.

Sean $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$.

Usando la suposición $f_{\nu(k)} \xrightarrow{\mu} g$ encontramos p_1 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \geq p_1 \qquad \mu(A(\varepsilon/2, \nu(k))) < \delta/2.$$

Inicio de demostración.

Sean $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$.

Usando la suposición $f_{\nu(k)} \xrightarrow{\mu} g$ encontramos p_1 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \geq p_1 \qquad \mu(A(\varepsilon/2, \nu(k))) < \delta/2.$$

Usando la suposición que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en medida encontramos p_2 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall m, n \geq p_2$$

Inicio de demostración.

Sean $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$.

Usando la suposición $f_{\nu(k)} \xrightarrow{\mu} g$ encontramos p_1 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \geq p_1 \qquad \mu(A(\varepsilon/2, \nu(k))) < \delta/2.$$

Usando la suposición que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en medida encontramos p_2 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall m, n \geq p_2 \qquad \mu(A(\varepsilon/2, m, n)) < \delta/2.$$

Inicio de demostración.

Sean $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$.

Usando la suposición $f_{\nu(k)} \xrightarrow{\mu} g$ encontramos p_1 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \geq p_1 \qquad \mu(A(\varepsilon/2, \nu(k))) < \delta/2.$$

Usando la suposición que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en medida encontramos p_2 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall m, n \geq p_2 \qquad \mu(A(\varepsilon/2, m, n)) < \delta/2.$$

Pongamos $q = \max\{p_1, p_2\}$. Si $n \geq q$, entonces

$$\nu(n) \geq p_1, \qquad n, \nu(n) \geq p_2.$$

Ejercicio: completar la demostración.

Unicidad del límite en medida

Proposición

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mu)$ y sean $g,h\in\mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mu)$ tales que

$$f_n \xrightarrow{\mu} g, \qquad f_n \xrightarrow{\mu} h.$$

Entonces g y h coinciden μ-c.t.p.:

$$\mu\left(\{x\in X:\ g(x)\neq h(x)\}\right)=0.$$

Unicidad del límite en medida

Proposición

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mu)$ y sean $g,h\in\mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mu)$ tales que

$$f_n \xrightarrow{\mu} g, \qquad f_n \xrightarrow{\mu} h.$$

Entonces g y h coinciden μ-c.t.p.:

$$\mu\left(\{x\in X:\ g(x)\neq h(x)\}\right)=0.$$

Ejercicio. Demostrar la proposición.

Repaso: sucesiones regulares de Cauchy de números

Recordemos que una sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ se llama regular de Cauchy si

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |\alpha_{n+1} - \alpha_n| \leq 2^{-n}.$$

Repaso: sucesiones regulares de Cauchy de números

Recordemos que una sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ se llama regular de Cauchy si

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |\alpha_{n+1} - \alpha_n| \le 2^{-n}.$$

Si se cumple esta condición, entonces para $\forall m > n$

$$|\alpha_m - \alpha_n| \le \sum_{k=n}^{m-1} |\alpha_{k+1} - \alpha_k| \le \sum_{k=n}^{m-1} 2^{-k} < 2^{-n+1}.$$

Repaso: sucesiones regulares de Cauchy de números

Recordemos que una sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ se llama regular de Cauchy si

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |\alpha_{n+1} - \alpha_n| \leq 2^{-n}.$$

Si se cumple esta condición, entonces para $\forall m > n$

$$|\alpha_m - \alpha_n| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |\alpha_{k+1} - \alpha_k| \leq \sum_{k=n}^{m-1} 2^{-k} < 2^{-n+1}.$$

Conclusión: cada sucesión regular de Cauchy es una sucesión de Cauchy.

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $(X, \mathcal{F}, \mu)$.

Decimos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es regular de Cauchy en medida μ si

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mu(A(2^{-n}, n, n+1)) < 2^{-n}.$$

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $(X, \mathcal{F}, \mu)$.
Decimos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es regular de Cauchy en medida μ si

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mu(A(2^{-n}, n, n+1)) < 2^{-n}.$$

Ejercicio. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en medida μ.
Demostrar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en medida μ.

Proposición

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en la medida μ.
Entonces existe una sucesión estrictamente creciente $(\nu(p))_{p\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ tal que $(f_{\nu(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ es regular de Cauchy en la medida μ.

Demostración

Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en medida μ,

Demostración

Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en medida μ,

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \forall\delta > 0 \quad \exists K(\varepsilon,\delta) \quad \forall m, n \geq K(\varepsilon,\delta) \quad \mu(A(\varepsilon, m, n)) < \delta.$$

Demostración

Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en medida μ,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists K(\varepsilon, \delta) \quad \forall m, n \geq K(\varepsilon, \delta) \quad \mu(A(\varepsilon, m, n)) < \delta.$$

Aplicamos esta condición con $\varepsilon = 2^{-p}$, $\delta = 2^{-p}$, y definimos $(\nu(p))_{p\in\mathbb{N}}$ por inducción:

$$\nu(1) := K(2^{-1}, 2^{-1}), \qquad \nu(p) := \max\{\nu(p-1)+1,\ K(2^{-p}, 2^{-p})\}.$$

Demostración

Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en medida μ,

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \forall\delta > 0 \quad \exists K(\varepsilon,\delta) \quad \forall m,n \geq K(\varepsilon,\delta) \quad \mu(A(\varepsilon,m,n)) < \delta.$$

Aplicamos esta condición con $\varepsilon = 2^{-p}$, $\delta = 2^{-p}$, y definimos $(\nu(p))_{p\in\mathbb{N}}$ por inducción:

$$\nu(1) := K(2^{-1},2^{-1}), \qquad \nu(p) := \max\{\nu(p-1)+1,\ K(2^{-p},2^{-p})\}.$$

Entonces para cada p en $\mathbb{N}$

$$\mu(A(2^{-p},\nu(p),\nu(p+1))) < 2^{-p}.$$

Cada sucesión regular de Cauchy en medida converge casi uniformemente

Proposición

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en la medida μ.

Entonces existe $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$ tal que

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.u.}} g.$$

Demostración, construcción de Z

Por la suposición, para cada n en $\mathbb{N}$ tenemos

Demostración, construcción de Z

Por la suposición, para cada n en $\mathbb{N}$ tenemos $\mu(A(2^{-n}, n, n+1)) < 2^{-n}$.

Demostración, construcción de Z

Por la suposición, para cada n en $\mathbb{N}$ tenemos $\mu(A(2^{-n}, n, n+1)) < 2^{-n}$.

Definimos

$$Y_k := \bigcup_{n=k}^{\infty} A(2^{-n}, n, n+1),$$

Demostración, construcción de Z

Por la suposición, para cada n en $\mathbb{N}$ tenemos $\mu(A(2^{-n}, n, n+1)) < 2^{-n}$.

Definimos

$$Y_k := \bigcup_{n=k}^{\infty} A(2^{-n}, n, n+1), \qquad Z := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} Y_k.$$

Demostración, construcción de Z

Por la suposición, para cada n en $\mathbb{N}$ tenemos $\quad \mu(A(2^{-n}, n, n+1)) < 2^{-n}$.

Definimos

$$Y_k := \bigcup_{n=k}^{\infty} A(2^{-n}, n, n+1), \qquad Z := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} Y_k.$$

$$\mu(Y_k) \le \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n} =$$

Demostración, construcción de Z

Por la suposición, para cada n en $\mathbb{N}$ tenemos $\mu(A(2^{-n}, n, n+1)) < 2^{-n}$.

Definimos

$$Y_k := \bigcup_{n=k}^{\infty} A(2^{-n}, n, n+1), \qquad Z := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} Y_k.$$

$$\mu(Y_k) \le \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n} = 2^{-k+1}.$$

Demostración, construcción de Z

Por la suposición, para cada n en $\mathbb{N}$ tenemos $\mu(A(2^{-n}, n, n+1)) < 2^{-n}$.

Definimos

$$Y_k := \bigcup_{n=k}^{\infty} A(2^{-n}, n, n+1), \qquad Z := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} Y_k.$$

$$\mu(Y_k) \le \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n} = 2^{-k+1}.$$

Como $\mu(Z) \le \mu(Y_k)$ para cada k en $\mathbb{N}$, concluimos que

$$\mu(Z)$$

Demostración, construcción de Z

Por la suposición, para cada n en $\mathbb{N}$ tenemos $\mu(A(2^{-n}, n, n+1)) < 2^{-n}$.

Definimos

$$Y_k := \bigcup_{n=k}^{\infty} A(2^{-n}, n, n+1), \qquad Z := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} Y_k.$$

$$\mu(Y_k) \leq \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n} = 2^{-k+1}.$$

Como $\mu(Z) \leq \mu(Y_k)$ para cada k en $\mathbb{N}$, concluimos que

$$\mu(Z) = 0.$$

Demostración, convergencia puntual en $X \setminus Z$

Sea $x \in X \setminus Z$.

Demostración, convergencia puntual en $X \setminus Z$

Sea $x \in X \setminus Z$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos k en $\mathbb{N}$ tal que

$$2^{-k+1} < \varepsilon, \qquad x \notin Y_k.$$

Demostración, convergencia puntual en $X \setminus Z$

Sea $x \in X \setminus Z$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos k en $\mathbb{N}$ tal que

$$2^{-k+1} < \varepsilon, \qquad x \notin Y_k.$$

Luego para cada $n \geq k$ tenemos $\quad x \notin$

Demostración, convergencia puntual en $X \setminus Z$

Sea $x \in X \setminus Z$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos k en $\mathbb{N}$ tal que

$$2^{-k+1} < \varepsilon, \qquad x \notin Y_k.$$

Luego para cada $n \geq k$ tenemos $\quad x \notin A(2^{-n}, n, n+1),$

Demostración, convergencia puntual en $X \setminus Z$

Sea $x \in X \setminus Z$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos k en $\mathbb{N}$ tal que

$$2^{-k+1} < \varepsilon, \qquad x \notin Y_k.$$

Luego para cada $n \geq k$ tenemos $\quad x \notin A(2^{-n}, n, n+1),$

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| < 2^{-n}.$$

Por lo tanto, $(f_n(x))_{n=k}^{\infty}$ es

Demostración, convergencia puntual en $X \setminus Z$

Sea $x \in X \setminus Z$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos k en $\mathbb{N}$ tal que

$$2^{-k+1} < \varepsilon, \qquad x \notin Y_k.$$

Luego para cada $n \geq k$ tenemos $\quad x \notin A(2^{-n}, n, n+1)$,

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| < 2^{-n}.$$

Por lo tanto, $(f_n(x))_{n=k}^{\infty}$ es una sucesión regular de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Como $\mathbb{C}$ es completo, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un límite.

Demostración, definición de la función g

Hemos mostrado que para cada x en $X \setminus Z$ la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un límite.

Definimos $g\colon X \to \mathbb{C}$,

$$g(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), & x \in X \setminus Z; \\ 0, & x \in Z. \end{cases}$$

Demostración, definición de la función g

Hemos mostrado que para cada x en $X \setminus Z$ la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un límite.

Definimos $g\colon X \to \mathbb{C}$,

$$g(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), & x \in X \setminus Z; \\ 0, & x \in Z. \end{cases}$$

Se puede demostrar que $g|_{X\setminus Z}$ y $g|_Z$ son medibles.

Demostración, definición de la función g

Hemos mostrado que para cada x en $X \setminus Z$ la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un límite.

Definimos $g\colon X \to \mathbb{C}$,

$$g(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), & x \in X \setminus Z; \\ 0, & x \in Z. \end{cases}$$

Se puede demostrar que $g|_{X\setminus Z}$ y $g|_Z$ son medibles.

Luego g es medible.

Demostración, convergencia casi uniforme a g

Dado $\eta > 0$, encontramos p en $\mathbb{N}$ tal que $2^{-p+1} < \eta$, y pongamos $E :=$

Demostración, convergencia casi uniforme a g

Dado $\eta > 0$, encontramos p en $\mathbb{N}$ tal que $2^{-p+1} < \eta$, y pongamos $E := Y_p$.

Demostración, convergencia casi uniforme a g

Dado $\eta > 0$, encontramos p en $\mathbb{N}$ tal que $2^{-p+1} < \eta$, y pongamos $E := Y_p$.
Si $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m > n \geq p$, entonces para cada x en $X \setminus E$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \sum_{j=n}^{m-1} |f_j(x) - f_{j+1}(x)| < \sum_{j=n}^{m-1} 2^{-j} = 2^{-n+1}.$$

Demostración, convergencia casi uniforme a g

Dado $\eta > 0$, encontramos p en $\mathbb{N}$ tal que $2^{-p+1} < \eta$, y pongamos $E := Y_p$.
Si $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m > n \geq p$, entonces para cada x en $X \setminus E$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \sum_{j=n}^{m-1} |f_j(x) - f_{j+1}(x)| < \sum_{j=n}^{m-1} 2^{-j} = 2^{-n+1}.$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$:

Demostración, convergencia casi uniforme a g

Dado $\eta > 0$, encontramos p en $\mathbb{N}$ tal que $2^{-p+1} < \eta$, y pongamos $E := Y_p$.
Si $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m > n \geq p$, entonces para cada x en $X \setminus E$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \sum_{j=n}^{m-1} |f_j(x) - f_{j+1}(x)| < \sum_{j=n}^{m-1} 2^{-j} = 2^{-n+1}.$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$:

$$|g(x) - f_n(x)| \leq 2^{-n+1}.$$

Demostración, convergencia casi uniforme a g

Dado $\eta > 0$, encontramos p en $\mathbb{N}$ tal que $2^{-p+1} < \eta$, y pongamos $E := Y_p$.
Si $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m > n \geq p$, entonces para cada x en $X \setminus E$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \sum_{j=n}^{m-1} |f_j(x) - f_{j+1}(x)| < \sum_{j=n}^{m-1} 2^{-j} = 2^{-n+1}.$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$:

$$|g(x) - f_n(x)| \leq 2^{-n+1}.$$

Esto implica que

Demostración, convergencia casi uniforme a g

Dado $\eta > 0$, encontramos p en $\mathbb{N}$ tal que $2^{-p+1} < \eta$, y pongamos $E := Y_p$.
Si $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m > n \geq p$, entonces para cada x en $X \setminus E$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \sum_{j=n}^{m-1} |f_j(x) - f_{j+1}(x)| < \sum_{j=n}^{m-1} 2^{-j} = 2^{-n+1}.$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$:

$$|g(x) - f_n(x)| \leq 2^{-n+1}.$$

Esto implica que $\quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X\setminus E} g.$

Teorema

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en medida μ.
Entonces existe una sucesión estrictamente creciente $(\nu(p))_{p\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$
y una función $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$ tales que

$$f_{\nu(p)} \xrightarrow[p\to\infty]{\mu\text{-c.u.}} g.$$

Teorema

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en medida μ.

Entonces existe una sucesión estrictamente creciente $(\nu(p))_{p\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$

y una función $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$ tales que

$$f_{\nu(p)} \xrightarrow[p\to\infty]{\mu\text{-c.u.}} g.$$

También podemos afirmar que

$$f_{\nu(p)} \xrightarrow[p\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g, \qquad f_{\nu(p)} \xrightarrow[p\to\infty]{\mu} g.$$

Corolario

Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en medida μ.

Entonces existe g en $\mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mu)$ tal que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en medida μ.