Teorema de Carathéodory

Objetivos. Dada una medida exterior φ, definir conjuntos *Carathéodory-medibles* respecto a φ, mostrar que esos conjuntos forman una σ-álgebra y la medida exterior φ restringida a esta álgebra es una medida. Demostrar el teorema de Carathéodory: cada premedida definida en un anillo se puede extender a la σ-álgebra generada por este anillo.

Requisitos. Semianillos y anillos, premedidas, medidas y medidas exteriores. Medida exterior generada por una premedida definida en un anillo.

Conjuntos Carathéodory-medibles respecto a una medida exterior

1 Definición (conjuntos Carathéodory-medibles respecto a una medida exterior)**.** Sea X un conjunto y sea $\varphi\colon 2^X \to [0, +\infty]$ una medida exterior. Un conjunto $A \subseteq X$ se llama *Carathéodory-medible* respecto a φ si

$$\forall P \subseteq X \qquad \varphi(P) = \varphi(P \cap A) + \varphi(P \setminus A).$$

Denotemos por $\mathcal{C}_\varphi$ al conjunto de todos los conjuntos Carathéodory-medibles respecto a la medida exterior φ:

$$\mathcal{C}_\varphi \coloneqq \big\{A \subseteq X\colon \quad \forall P \subseteq X \quad \varphi(P) = \varphi(P \cap A) + \varphi(P \setminus A)\big\}.$$

2 Observación. Para todos $A, Y \subseteq X$, la desigualdad

$$\varphi(P) \le \varphi(P \cap A) + \varphi(P \setminus A)$$

se sigue de la propiedad subaditiva de la medida exterior φ. Por eso los conjuntos Carathéodory-medibles respecto φ se pueden definir de la siguiente manera:

$$\mathcal{C}_\varphi = \big\{A \subseteq X\colon \quad \forall P \subseteq X \quad \varphi(P \cap A) + \varphi(P \setminus A) \le \varphi(P)\big\}.$$

Medidas completas

3 Definición (medida completa)**.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Se dice que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es *completo* o que la medida μ es *completa*, si para cada A en $\mathcal{F}$ tal que $\mu(A) = 0$ y cada $B \subseteq A$, se tiene que $B \in \mathcal{F}$.

4 Ejemplo (ejemplo de una medida incompleta)**.** Sean

$$X = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad \mathcal{F} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}.$$

Definimos $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ como la función constante cero:

$$\mu(A) \coloneqq 0 \qquad (A \in \mathcal{F}).$$

Entonces, $\mu(\{1, 2\}) = 0$ y $\{1\} \subseteq \{1, 2\}$, pero $\{1\} \notin \mathcal{F}$, asi que la función μ no está definida en $\{1\}$.

Construcción de Carathéodory: σ-álgebra y medida asociadas a una medida exterior

5 Teorema (sobre la σ-álgebra y medida asociadas a una medida exterior)**.** *Sea X un conjunto y sea $\varphi\colon 2^X \to [0,+\infty]$ una medida exterior. Entonces, $\mathcal{C}_\varphi$ es una σ-álgebra y la restricción de φ al conjunto $\mathcal{C}_\varphi$ es una medida completa.*

Partimos la demostración en una serie de lemas.

6 Lema. *$\mathcal{C}_\varphi$ es un álgebra de conjuntos sobre X.*

Demostración. 1. $X \in \mathcal{C}_\varphi$. Ejercicio.

2. Sea $A \in \mathcal{C}_\varphi$. Entonces, $A^c \in \mathcal{C}_\varphi$. Ejercicio.

3. Sean $A, B \in \mathcal{C}_\varphi$. Demostremos que $A \cap B \in \mathcal{C}_\varphi$. Sea $P \subseteq X$. Entonces,

$$\begin{aligned}
&\varphi(P \cap (A \cap B)) + \varphi(P \cap (A \cap B)^c) \\
&\quad = \varphi(P \cap (A \cap B)) + \varphi(P \cap (A \cap B)^c \cap A) + \varphi(P \cap (A \cap B)^c \cap A^c) \\
&\quad = \varphi(P \cap A \cap B) + \varphi(P \cap B^c \cap A) + \varphi(P \cap A^c) \\
&\quad = \varphi(P \cap A) + \varphi(P \cap A^c) = \varphi(P).
\end{aligned}$$

   Ejercicio: demostrar que $P \cap (A \cap B)^c \cap A = P \cap B^c \cap A$ y $P \cap (A \cap B)^c \cap A^c = P \cap A^c$.

4. Sean $A, B \in \mathcal{C}_\varphi$. Entonces, de los incisos 2 y 3 de esta demostración se sigue que $A \cup B \in \mathcal{C}_\varphi$ y $A \setminus B \in \mathcal{C}_\varphi$, porque

$$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c, \qquad A \setminus B = A \cap B^c. \qquad \square$$

7 Lema. *Sean $A, B \in \mathcal{C}_\varphi$ disjuntos y sea $P \subseteq X$. Entonces,*

$$\varphi(P \cap (A \cup B)) = \varphi(P \cap A) + \varphi(P \cap B).$$

Demostración. Pongamos $Q = P \cap (A \cup B)$ y apliquemos la condición $A \in \mathcal{C}_\varphi$:

$$\varphi(Q) = \varphi(Q \cap A) + \varphi(Q \cap A^c).$$

Luego notemos que

$$\begin{aligned}
Q \cap A &= (P \cap A \cap A) \cup (P \cap B \cap A) = P \cap A, \\
Q \cap A^c &= (P \cap A \cap A^c) \cup (P \cap B \cap A^c) = P \cap B. \qquad \square
\end{aligned}$$

8 Lema. *Sea $m \in \mathbb{N}$, sean $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{C}_\varphi$ disjuntos a pares y sea $P \subseteq X$. Entonces,*

$$\varphi\left(P \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right)\right) = \sum_{j=1}^{m} \varphi(P \cap A_j).$$

Demostración. Aplicamos el Lema 7 y la inducción matemática sobre m. En el caso $m = 1$ la afirmación es trivial:

$$\varphi(P \cap A_1) = \varphi(P \cap A_1).$$

Suponiendo que $m \in \{2, 3, \ldots\}$ y la afirmación es cierta para $m-1$; la vamos a demostrar para m. Ponemos

$$B \coloneqq \bigcup_{j=1}^{m-1} A_j.$$

Entonces, $B \cap A_m = \varnothing$, $\bigcup_{j=1}^{m} A_j = B \cup A_m$. Aplicamos el lema anterior y luego la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned}\varphi(P \cap (B \cup A_m)) &= \varphi(P \cap B) + \varphi(P \cap A_m) \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} \varphi(P \cap A_j) + \varphi(P \cap A_m) = \sum_{j=1}^{m} \varphi(P \cap A_j).\end{aligned}$$ □

9 Lema. *Sea $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión disjunta en $\mathcal{C}_\varphi$ y sea*

$$B = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j.$$

Entonces, $B \in \mathcal{C}_\varphi$ y

$$\varphi(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j). \tag{1}$$

Demostración. Denotemos por $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a la sucesión de las "uniones parciales" de la sucesión $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$:

$$C_k \coloneqq \bigcup_{j=1}^{k} A_j.$$

Sea $P \subseteq X$. Por el lema anterior,

$$\varphi(P \cap C_k) = \sum_{j=1}^{k} \varphi(P \cap A_j).$$

De aquí,

$$\varphi(P \cap B^c) + \sum_{j=1}^{k} \varphi(P \cap A_j) = \varphi(P \cap B^c) + \varphi(P \cap C_k)$$

usando la contención $B^c \subseteq C_k^c$ y la monotonía de φ

$$\leq \varphi(P \cap C_k^c) + \varphi(P \cap C_k)$$

usando el hecho que $C_k \in \mathfrak{C}_\varphi$

$$= \varphi(P).$$

Pasamos al límite cuando $k \to \infty$:

$$\varphi(P \cap B^c) + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(P \cap A_j) \leq \varphi(P). \tag{2}$$

Por otro lado, apliquemos la propiedad subaditiva de φ:

$$\varphi(P) \leq \varphi(P \cap B^c) + \varphi(P \cap B) \leq \varphi(P \cap B^c) + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(P \cap A_j). \tag{3}$$

De (2) y (3) obtenemos que

$$\varphi(P) = \varphi(P \cap B) + \varphi(P \cap B^c) \tag{4}$$

y

$$\varphi(P) = \varphi(P \cap B^c) + \sum_{j \in \mathbb{N}} \varphi(P \cap A_j). \tag{5}$$

La igualdad (4) se cumple para cada $P \subseteq X$, por lo tanto $B \in \mathfrak{C}_\varphi$. De la igualdad (5), poniendo $P = B$, obtenemos (1). □

10 Lema. *Sean X un conjunto y $\mathcal{A}$ una álgebra de conjuntos sobre X. Además, supongamos que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo uniones numerables disjuntas. Entonces, $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra sobre X.*

Idea de demostración. Cada unión numerable se expresa a través de uniones finitas, diferencias y una unión numerable disjunta. □

Demostración. Sea $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos en $\mathcal{A}$ y sea

$$B \coloneqq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j.$$

Tenemos por demostrar que $B \in \mathcal{A}$. Para cada k en $\mathbb{N}$, definimos

$$C_k \coloneqq \bigcup_{j=1}^{k} A_j, \qquad D_k \coloneqq C_k \setminus C_{k-1}.$$

Entonces, como ya habíamos visto previamente, los conjuntos D_k son disjuntos a pares y

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k.$$

Los conjuntos C_k y D_k se obtienen de A_j a través de uniones finitas y diferencias, por lo tanto pertenecen al álgebra $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es cerrada bajo uniones disjuntas numerables, $B \in \mathcal{A}$. □

Por los lemas anteriores, $\mathcal{C}_\varphi$ es una σ-álgebra, y la restricción de φ a $\mathcal{C}_\varphi$ es una medida. Nos falta demostrar que esta restricción es una medida completa.

11 Lema. *Si $B \subseteq X$ y $\varphi(B) = 0$, entonces $A \in \mathcal{C}_\varphi$.*

Demostración. Para cada $P \subseteq X$, tenemos que

$$\varphi(P \cap B) + \varphi(P \setminus B) \leq \varphi(B) + \varphi(P) = 0 + \varphi(P) = \varphi(P). \qquad \square$$

12 Lema. *La restricción de φ a $\mathcal{C}_\varphi$ es una medida completa.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{C}_\varphi$ tal que $\varphi(A) = 0$ y sea $B \subseteq A$. Por la propiedad monótona de la medida exterior φ, tenemos que $\varphi(B) = 0$. Luego aplicamos el lema anterior. □

Con esto se termina la demostración del Teorema 5.

Teorema de Carathéodory sobre la extensión de una premedida definida en un anillo a la σ-álgebra generada por este anillo

13 Teorema (teorema de Carathéodory sobre la extensión de una premedida definida en un anillo a la σ-álgebra generada por este anillo)**.** *Sean X un conjunto, $\mathcal{A}$ un anillo sobre X y $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ una premedida. Denotemos por $\mathcal{F}$ a la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$. Entonces existe una medida $\nu\colon \mathcal{F} \to [0,+\infty]$ tal que $\nu(Y) = \mu(Y)$ para cada Y en $\mathcal{A}$.*

Demostración. Denotamos por μ^* a la medida exterior generada por la premedida μ. Sea $\mathcal{C}_{\mu^*}$ la σ-álgebra de Carathéodory inducida por μ^*. Para fines de brevedad, escribiremos $\mathcal{C}$ en vez de $\mathcal{C}_{\mu^*}$. En otras palabras,

$$\mathcal{C} = \Big\{ Y \subseteq X\colon \quad \forall P \subseteq X \quad \mu^*(P \cap Y) + \mu^*(P \setminus Y) = \mu^*(P) \Big\}.$$

Por el teorema principal de este tema, sabemos que $\mathcal{C}$ es una σ-álgebra.

1. Demostremos que el anillo original $\mathcal{A}$ está contenido en la σ-álgebra $\mathcal{C}$. Sean $A \in \mathcal{A}$ y $P \subseteq X$. Sea $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una $\mathcal{A}$-cubierta de P. Entonces, $(Q_j \cap A)_{j\in\mathbb{N}}$ es una $\mathcal{A}$-cubierta de $P \cap A$ y $(Q_j \cap A^c)_{j\in\mathbb{N}}$ es una $\mathcal{A}$-cubierta de $P \cap A^c$. Aplicamos la definición de μ^* y luego la propiedad condicionalmente aditiva de μ:

$$\mu^*(P \cap A) + \mu^*(P \cap A^c) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(Q_j \cap A) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu(Q_j \cap A^c) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(Q_j).$$

Hemos demostrado que $\mu^*(P \cap A) + \mu^*(P \cap A^c)$ es una cota inferior del conjunto

$$\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(Q_j)\colon \quad (Q_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \quad P \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j \right\}.$$

Por la definición de μ^*, concluimos que

$$\mu^*(P \cap A) + \mu^*(P \cap A^c) \leq \mu^*(P).$$

Como P fue un subconjunto arbitrario de X, hemos demostrado que $A \in \mathcal{C}$.

2. Como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ es una σ-álgebra, la σ-álgebra $\mathcal{F}$, generada por $\mathcal{A}$, está contenida en $\mathcal{C}$. Definimos ν como la restricción de μ^* a $\mathcal{F}$:

$$\nu \coloneqq \mu^*|_{\mathcal{F}}.$$

Ya sabemos que $\mu^*|_{\mathcal{C}}$ es una medida. Por lo tanto, $\mu^*|_{\mathcal{F}}$ es una medida. Además, si $A \in \mathcal{A}$, entonces $\nu(A) = \mu^*(A) = \mu(A)$. Hemos mostrado que $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu$. □