Teorema de Carathéodory

Objetivos. Dada una medida exterior φ, definir conjuntos *Carathéodory-medibles* respecto a φ, mostrar que esos conjuntos forman una σ-álgebra y la medida exterior φ restringida a esta álgebra es una medida. Demostrar el teorema de Carathéodory que toda premedida definida en un anillo se puede extender a la σ-álgebra generada por este anillo.

Requisitos. Semianillos y anillos, premedidas, medidas y medidas exteriores. Medida exterior generada por una premedida definida en un anillo.

1 Definición (conjuntos Carathéodory-medibles respecto a una medida exterior)**.** Sea X un conjunto y sea $\varphi\colon 2^X \to [0,+\infty]$ una medida exterior. Un conjunto $A \subseteq X$ se llama *Carathéodory-medible* respecto a φ si

$$\forall P \subseteq X \qquad \varphi(P) = \varphi(P \cap A) + \varphi(P \setminus A).$$

Denotemos por $\mathcal{C}_\varphi$ al conjunto de todos los conjuntos Carathéodory-medibles respecto a la medida exterior φ:

$$\mathcal{C}_\varphi \coloneqq \big\{A \subset X\colon \quad \forall P \subseteq X \quad \varphi(P) = \varphi(P \cap A) + \varphi(P \setminus A)\big\}.$$

2 Observación. Para todos $A, Y \subseteq X$, la condición

$$\varphi(P) \le \varphi(P \cap A) + \varphi(P \setminus A)$$

se sigue de la propiedad subaditiva de la medida exterior φ. Por eso los conjuntos Carathéodory-medibles respecto φ se pueden definir de la siguiente manera:

$$\mathcal{C}_\varphi = \big\{A \subset X\colon \quad \forall P \subseteq X \quad \varphi(P \cap A) + \varphi(P \setminus A) \le \varphi(P)\big\}.$$

3 Definición (medida completa)**.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Se dice que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es *completo* o que la medida μ es *completa*, si para todo $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) = 0$ y todo $B \subseteq A$ se tiene que $B \in \mathcal{F}$.

Construcción de Carathéodory: $\boldsymbol{\sigma}$-álgebra y medida asociadas a una medida exterior

4 Teorema (sobre la σ-álgebra y medida asociadas a una medida exterior)**.** *Sea X un conjunto y sea $\varphi\colon 2^X \to [0,+\infty]$ una medida exterior. Entonces $\mathcal{C}_\varphi$ es una σ-álgebra y la restricción de φ al conjunto $\mathcal{C}_\varphi$ es una medida completa.*

Partimos la demostración en una serie de lemas.

5 Lema. *$\mathcal{C}_\varphi$ es un álgebra de conjuntos sobre X.*

Demostración.

1. $X \in \mathcal{C}_\varphi$.
2. Sea $A \in \mathcal{C}_\varphi$. Entonces $A^c \in \mathcal{C}_\varphi$.
3. Sean $A, B \in \mathcal{C}_\varphi$. Demostremos que $A \cap B \in \mathcal{C}_\varphi$. Sea $P \subseteq X$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\varphi(P \cap (A \cap B)) + \varphi(P \cap (A \cap B)^c) \\
&\qquad = \varphi(P \cap (A \cap B)) + \varphi(P \cap (A \cap B)^c \cap A) + \varphi(P \cap (A \cap B)^c \cap A^c) \\
&\qquad = \varphi(P \cap A \cap B) + \varphi(P \cap B^c \cap A) + \varphi(P \cap A^c) \\
&\qquad = \varphi(P \cap A) + \varphi(P \cap A^c) = \varphi(P).
\end{aligned}$$

4. Sean $A, B \in \mathcal{C}_\varphi$. Entonces de los incisos 2 y 3 de la demostración sigue que $A \cup B \in \mathcal{C}_\varphi$ y $A \setminus B \in \mathcal{C}_\varphi$, porque

$$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c, \qquad A \setminus B = A \cap B^c. \qquad \square$$

6 Lema. *Sean* $A, B \in \mathcal{C}_\varphi$ *disjuntos y* $P \subseteq X$. *Entonces*

$$\varphi(P \cap (A \cup B)) = \varphi(P \cap A) + \varphi(P \cap B).$$

Demostración. Pongamos $Q = P \cap (A \cup B)$ y apliquemos la condición $A \in \mathcal{C}_\varphi$:

$$\varphi(Q) = \varphi(Q \cap A) + \varphi(Q \cap A^c).$$

Luego notemos que

$$\begin{aligned} Q \cap A &= (P \cap A \cap A) \cup (P \cap B \cap A) = P \cap A, \\ Q \cap A^c &= (P \cap A \cap A^c) \cup (P \cap B \cap A^c) = P \cap B. \end{aligned} \qquad \square$$

7 Lema. *Sean* $m \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{C}_\varphi$ *mutualmente disjuntos y* $P \subset X$. *Entonces*

$$\varphi\left(P \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right)\right) = \sum_{j=1}^{m} \varphi(P \cap A_j).$$

Demostración. Aplicamos la inducción matemática sobre m. En el caso $m = 1$ la afirmación es trivial:

$$\varphi(P \cap A_1) = \varphi(P \cap A_1).$$

Suponiendo que $m \in \{2, 3, \ldots\}$ y la afirmación es cierta para $m-1$, la vamos a demostrar para m. Ponemos

$$A = \bigcup_{j=1}^{m-1} A_j, \qquad B = A_m.$$

Entonces $A \cap B = \varnothing$, $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{m} A_j = A \cup B$. Aplicamos el lema anterior:

$$\varphi(P \cap (A \cup B)) = \varphi(P \cap A) + \varphi(P \cap B)$$

y la hipótesis de inducción:

$$= \sum_{j=1}^{m-1} \varphi(P \cap A_j) + \varphi(P \cap A_m) = \sum_{j=1}^{m} \varphi(P \cap A_j). \qquad \square$$

8 Lema. *Sea* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión disjunta en* $\mathcal{C}_\varphi$ *y sea*

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Entonces $B \in \mathcal{C}_\varphi$ *y*

$$\varphi(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n). \tag{1}$$

Demostración. Denotemos por C_k a las "uniones parciales" de la sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$C_k \coloneqq \bigcup_{n=1}^{k} A_n.$$

Sea $P \subseteq X$. Por el lema anterior,

$$\varphi(P \cap C_k) = \sum_{n=1}^{k} \varphi(P \cap A_n).$$

De aquí,

$$\varphi(P \cap B^c) + \sum_{n=1}^{k} \varphi(P \cap A_n) = \varphi(P \cap B^c) + \varphi(P \cap C_k)$$

usando la contención $B^c \subseteq C_k^c$ y la monotonía de φ

$$\leq \varphi(P \cap C_k^c) + \varphi(P \cap C_k)$$

usando el hecho que $C_k \in \mathcal{C}_\varphi$

$$= \varphi(P).$$

Pasamos al límite cuando $k \to \infty$:

$$\varphi(P \cap B^c) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(P \cap A_n) \leq \varphi(P). \tag{2}$$

Por otro lado, de la propiedad subaditiva de φ,

$$\varphi(P) \leq \varphi(P \cap B^c) + \varphi(P \cap B) \leq \varphi(P \cap B^c) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(P \cap A_n). \tag{3}$$

De (2) y (3) obtenemos que

$$\varphi(P) = \varphi(P \cap B) + \varphi(P \cap B^c) \tag{4}$$

y

$$\varphi(P) = \varphi(P \cap B^c) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi(P \cap A_n). \tag{5}$$

La igualdad (4) se cumple para todo $P \subset X$, por lo tanto $B \in \mathcal{C}_\varphi$. De la igualdad (5) poniendo $P = B$ obtenemos (1). □

9 Lema. *Sean X un conjunto y $\mathcal{A}$ una álgebra de conjuntos sobre X cerrada bajo uniones numerables disjuntas. Entonces $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra sobre X.*

Idea de demostración. Toda unión numerable se expresa a través de uniones finitas, diferencias y una unión numerable disjunta. $\square$

Demostración. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos en $\mathcal{A}$ y sea

$$B \coloneqq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Tenemos por demostrar que $B \in \mathcal{A}$. Definimos

$$C_k \coloneqq \bigcup_{n\leq k} A_n, \qquad D_k \coloneqq C_k \setminus C_{k-1}.$$

Entonces, como ya habíamos visto previamente, los conjuntos D_k son disjuntos a pares y

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k.$$

Los conjuntos C_k y D_k se obtienen de A_n a través de uniones finitas y diferencias, por lo tanto pertenecen al álgebra $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es cerrada bajo uniones disjuntas numerables, $B \in \mathcal{A}$. $\square$

Por los lemas anteriores, $\mathcal{C}_\varphi$ es una σ-álgebra, y la restricción de φ a $\mathcal{C}_\varphi$ es una medida. Nos falta demostrar que esta restricción es una medida completa.

10 Lema. *Si $A \subseteq X$ y $\varphi(A) = 0$, entonces $A \in \mathcal{C}_\varphi$.*

Demostración. Para todo $P \subseteq X$ tenemos

$$\varphi(P \cap A) + \varphi(P \setminus A) \leq 0 + \varphi(P) = \varphi(P).$$ $\square$

11 Lema. *La restricción de φ a $\mathcal{C}_\varphi$ es una medida completa: si $A \in \mathcal{C}_\varphi$, $\varphi(A) = 0$ y $B \subseteq A$, entonces $B \in \mathcal{C}_\varphi$.*

Demostración. Por la propiedad monótona de la medida exterior φ tenemos que $\varphi(B) = 0$. Luego aplicamos el lema anterior. $\square$

Con esto se termina la demostración del Teorema 4.

Teorema de Carathéodory sobre la extensión de una premedida definida en un anillo a la σ-álgebra generada por este anillo

12 Teorema (teorema de Carathéodory sobre la extensión de una premedida definida en un anillo a la σ-álgebra generada por este anillo)**.** *Sean X un conjunto, $\mathcal{R}$ un anillo sobre X y $\mu\colon \mathcal{R} \to [0,+\infty]$ una premedida. Denotemos por $\mathcal{F}$ a la σ-álgebra generada por $\mathcal{R}$. Entonces existe una medida $\nu\colon \mathcal{F} \to [0,+\infty]$ tal que $\nu(Y) = \mu(Y)$ para todo Y en $\mathcal{R}$.*

Demostración. Denotamos por μ^* a la medida exterior generada por la premedida μ. Denotemos por $\mathcal{C}_{\mu^*}$ o, más brevemente, por $\mathcal{C}$, a la σ-álgebra de Carathéodory asociada con μ^*.

1. Demostremos que el anillo original $\mathcal{R}$ está contenido en la σ-álgebra $\mathcal{C}$. Sean $A \in \mathcal{R}$ y $P \subseteq X$. Sea $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una $\mathcal{R}$-cubierta de P. Entonces $(Q_n \cap A)_{n\in\mathbb{N}}$ es una $\mathcal{R}$-cubierta de $P \cap A$ y $(Q_n \cap A^c)_{n\in\mathbb{N}}$ es una $\mathcal{R}$-cubierta de $P \cap A^c$. Por lo tanto

$$\mu^*(P \cap A) + \mu^*(P \cap A^c) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(Q_n \cap A) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(Q_n \cap A^c) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(Q_n).$$

Como $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una $\mathcal{R}$-cubierta arbitraria de P,

$$\mu^*(P \cap A) + \mu^*(P \cap A^c) \le \mu^*(P),$$

así que $A \in \mathcal{C}$.

2. Como $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ es una σ-álgebra, la σ-álgebra $\mathcal{F}$, generada por $\mathcal{R}$, está contenida en $\mathcal{C}$. Definimos ν como la restricción de μ^* a $\mathcal{F}$. Ya sabemos que $\mu^*|_{\mathcal{C}}$ es una medida. Por lo tanto, $\mu^*|_{\mathcal{F}}$ es una medida. Además, si $A \in \mathcal{R}$, entonces $\nu(A) = \mu^*(A) = \mu(A)$. Hemos mostrado que $\nu|_{\mathcal{R}} = \mu$. $\square$