Identidad de Binet–Cauchy y sus aplicaciones

Objetivos. Demostrar la identidad de Binet–Cauchy y conocer algunas de sus aplicaciones, incluso la desigualdad de Cauchy para vectores y la desigualdad de Cauchy para vectores y sucesiones.

1. Sean $u, v \in \mathbb{C}^n$. Demuestre que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} u_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right) = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} (u_j v_k + u_k v_j).$$

2. Sea $u \in \mathbb{C}^n$. Demuestre que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} u_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} u_j^2 + 2\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} u_j u_k.$$

3. Identidad de Binet–Cauchy. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{C}^n$. Demuestre que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j c_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k d_k\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} a_j d_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k c_k\right) = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} (a_j b_k - a_k b_j)(c_j d_k - c_k d_j).$$

4. Identidad de Lagrange. Sean $a, b \in \mathbb{C}^n$. Demuestre que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} (a_j b_k - a_k b_j)^2.$$

5. Identidad de Lagrange con números complejos y valores absolutos. Sean $a, b \in \mathbb{C}^n$. Demuestre que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right) - \left|\sum_{j=1}^{n} a_j \overline{b_j}\right|^2 = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} |a_j b_k - a_k b_j|^2.$$

6. Desigualdad de Cauchy para vectores reales. Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 \le \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right).$$

7. Desigualdad de Cauchy para vectores complejos. Sean $a, b \in \mathbb{C}^n$. Demuestre que

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j \overline{b_j}\right|^2 \le \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^2\right).$$

8. ¿Cuándo se alcanza la igualdad en la desigualdad de Cauchy?. Usando la identidad de Lagrange (con números complejos y valores absolutos) determine cuándo la desigualdad de Cauchy se convierte en una igualdad. Considere dos casos: $a = \mathbf{0}_n$ y $a \ne \mathbf{0}_n$.

9. Desigualdad de Cauchy para sucesiones cuadrado integrables. Sean $a, b \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tales que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_j|^2 < +\infty, \qquad \sum_{j\in\mathbb{N}} |b_j|^2 < +\infty.$$

Demuestre que la siguiente serie converge absolutamente:

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \overline{b_j},$$

y que se cumple la desigualdad

$$\left|\sum_{j\in\mathbb{N}}^{n} a_j \overline{b_j}\right|^2 \le \left(\sum_{j\in\mathbb{N}}^{n} |a_j|^2\right)\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}^{n} |b_j|^2\right).$$

Bunyakovski notó que la desigualdad de Cauchy se puede demostrar (con pasando de sumas finitas a integrales) para funciones cuadrado integrables. A continuación del curso vamos a demostrar un análogo de la desigualdad de Cauchy para espacios vectoriales con producto interno (abstracto). La idea de demostración en este caso general fue propuesta por Schwarz.