La identidad de Binet–Cauchy y sus aplicaciones

Objetivos. Demostrar la identidad de Binet–Cauchy y conocer algunas de sus aplicaciones, incluso la desigualdad de Cauchy para vectores y la desigualdad de Cauchy para vectores y sucesiones.

1 Ejercicio. Sean $u, v \in \mathbb{C}^n$. Demostrar que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} u_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right) = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} (u_j v_k + u_k v_j).$$

2 Ejercicio. Sea $u \in \mathbb{C}^n$. Demostrar que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} u_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} u_j^2 + 2\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} u_j u_k.$$

3 Ejercicio (la identidad de Binet–Cauchy)**.** Sean $a, b, c, d \in \mathbb{C}^n$. Demostrar que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j c_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k d_k\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} a_j d_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k c_k\right) = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} (a_j b_k - a_k b_j)(c_j d_k - c_k d_j).$$

4 Ejercicio (la identidad de Lagrange)**.** Sean $a, b \in \mathbb{C}^n$. Demostrar que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} (a_j b_k - a_k b_j)^2.$$

5 Ejercicio (la identidad de Lagrange con números complejos y valores absolutos)**.** Sean $a, b \in \mathbb{C}^n$. Demostrar que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right) - \left|\sum_{j=1}^{n} a_j \overline{b_j}\right|^2 = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} |a_j b_k - a_k b_j|^2.$$

6 Ejercicio (la desigualdad de Cauchy para vectores reales)**.** Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \right)^2 \le \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2 \right). \tag{1}$$

7 Ejercicio (la desigualdad de Cauchy para vectores complejos)**.** Sean $a, b \in \mathbb{C}^n$. Demostrar que

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_j \overline{b_j} \right|^2 \le \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 \right).$$

8 Ejercicio (¿cuándo se alcanza la igualdad en la desigualdad de Cauchy?)**.** Usando la identidad de Lagrange (con números complejos y valores absolutos) determinar cuándo la desigualdad de Cauchy se convierte en una igualdad. Se recomienda considerar dos casos: $a = 0_n$ y $a \ne 0_n$.

9 Ejercicio (la desigualdad de Cauchy para sucesiones cuadrado integrables)**.** Sean $a, b \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tales que

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} |a_j|^2 < +\infty, \qquad \sum_{j \in \mathbb{N}} |b_j|^2 < +\infty.$$

Demuestre que la siguiente serie converge absolutamente:

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \overline{b_j},$$

y que se cumple la desigualdad

$$\left| \sum_{j \in \mathbb{N}}^{n} a_j \overline{b_j} \right|^2 \le \left(\sum_{j \in \mathbb{N}}^{n} |a_j|^2 \right) \left(\sum_{j \in \mathbb{N}}^{n} |b_j|^2 \right).$$

Cauchy publicó la desigualdad (1) en 1821. Bunyakovski (1859) notó que la desigualdad de Cauchy se puede demostrar para funciones cuadrado integrables. Si entiendo bien, su idea fue usar la desigualdad de Cauchy y aproximar integrales por sumas finitas. A continuación del curso vamos a demostrar un análogo de la desigualdad de Cauchy para espacios vectoriales con producto interno. La idea de demostración en este caso general fue propuesta por Schwarz (1888). La demostración de Schwarz no utiliza la desigualdad clásica de Cauchy.