La función Beta de Euler

Objetivos. Estudiar varias definiciones equivalentes de la función Beta de Euler. Demostrar la fórmula que la expresa en términos de la función Gamma. Estudiar la relación de la función Beta con los coeficientes binominales.

Requisitos. La función Gamma de Euler. Cambios de variables en integrales.

Repaso: la función Γ y sus propiedades básicas

1 Definición. Para $x > 0$,

$$\Gamma(x) \coloneqq \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

2 Proposición (la ecuación funcional para Γ, i.e. la relación de recurrencia)**.** *Para cada $x > 0$,*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

3 Proposición (Γ y factorial)**.** *Para n en $\mathbb{N}$,*

$$\Gamma(n) = (n-1)!. \tag{1}$$

4 Proposición (la fórmula de reflexión, i.e. la fórmula de los complementos)**.** *Para $0 < x < 1$,*

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}. \tag{2}$$

En particular, la fórmula (2) implica que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

5 Ejercicio. Calcular $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$. Empezar con $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

La función B y sus propiedades básicas

6 Definición. Para $x, y > 0$,

$$\mathrm{B}(x,y) \coloneqq \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t. \tag{3}$$

7 Ejercicio (la propiedad simétrica de la función Beta)**.** Usando la fórmula (3) y el cambio de variable $s = 1 - t$ demostrar que

$$\mathrm{B}(y,x) = \mathrm{B}(x,y).$$

8 Proposición (la función Beta como cierta integral sobre los reales positivos)**.** *Para* $x, y > 0$,

$$\mathrm{B}(x,y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\mathrm{d}u.$$

Demostración. En la fórmula (3) hacer el cambio de variable $t = \frac{u}{1+u}$. □

9 Proposición (la función Beta como cierta integral de funciones trigonométricas)**.** *Para* $x, y > 0$,

$$\mathrm{B}(p,q) = 2 \cdot \int\limits_0^{\pi/2} (\sin(\vartheta))^{2x-1} (\cos(\vartheta))^{2y-1}\,\mathrm{d}\vartheta. \tag{4}$$

10 Corolario. *Para* $\alpha, \beta > -1$,

$$\int\limits_0^{\pi/2} (\sin(\vartheta))^{\alpha} (\cos(\vartheta)^{\beta})\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right). \tag{5}$$

11 Proposición (expresión de B a través de Γ)**.** *Para* $x, y > 0$,

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{6}$$

Demostración. Esta demostración está basada en la fórmula trigonométrica (4) para la función B y en cambios de variables. Primero hacemos el cambio de variable $u = a^2$ en la integral que define la función Gamma:

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\, u^{x-1}\,\mathrm{d}u = 2 \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-a^2}\, a^{2x-1}\,\mathrm{d}a.$$

Escribimos el producto $\Gamma(x)\Gamma(y)$ de esta manera y convertimos el producto de integrales en la integral sobre $[0,+\infty)^2$, usando el teorema de Tonelli:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= 4 \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-a^2}\, a^{2x-1}\,\mathrm{d}a \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-b^2}\, b^{2y-1}\,\mathrm{d}b \\
&= 4 \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(a^2+b^2)}\, a^{2x-1} b^{2y-1}\,\mathrm{d}a \right) \mathrm{d}b \\
&= 4 \int\limits_{[0,+\infty)^2} \mathrm{e}^{-(a^2+b^2)}\, a^{2x-1} b^{2y-1}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b.
\end{aligned}$$

Ahora pasamos a las coordenadas polares (hacemos el cambio de variable correspondiente):

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r^2}\, r^{2x+2y-2} r\,\mathrm{d}r \cdot 2\int_0^{\pi/2} (\cos(\vartheta))^{2x-1} (\sin(\vartheta))^{2y-1}\,\mathrm{d}\vartheta.$$

Es fácil ver que las últimas integrales se convierten en $\Gamma(x+y)$ y $\mathrm{B}(x,y)$. □

12 Proposición.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx = \frac{1}{q}\Gamma\left(\frac{p}{q}\right)\Gamma\left(1-\frac{p}{q}\right) = \frac{\pi}{q\sin\frac{p\pi}{q}}.$$

Cálculo de algunas integrales a través de las funciones Γ y B

13 Ejemplo. Para $a > 0$, calculemos la integral

$$\int_0^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

14 Ejemplo.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

15 Ejemplo.

$$\int_0^{+\infty} x^p\ \mathrm{e}^{-ax}\ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

16 Ejemplo.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicios: calcular integrales usando las funciones Γ y B

17 Ejercicio. $\displaystyle\int\limits_0^1 \sqrt{x - x^2}\,\mathrm{d}x.$

18 Ejercicio. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^3}.$

19 Ejercicio. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1 + x^4}.$

20 Ejercicio. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 x \cdot \cos^4 x\,\mathrm{d}x.$

21 Ejercicio. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{1 - x^n}} \quad (n > 1).$

22 Ejercicio. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^{2n}\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \quad (n \in \mathbb{Z},\ n > 0).$

23 Ejercicio. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^n x\,\mathrm{d}x.$

24 Ejercicio. $\displaystyle\int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p\,\mathrm{d}x.$

25 Ejercicio. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\,\ln^2 x}{1 + x}\,\mathrm{d}x.$

26 Ejercicio. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,\ln x}{1 + x^3}\,\mathrm{d}x.$