Desigualdades de Bernoulli y de Young

Objetivos. Demostrar las desigualdades de Bernoulli y de Young.

Prerrequisitos. Teorema del valor medio, criterio de monotonía para funciones derivables, la función exponencial y la función logarítmica.

Aplicaciones. Desigualdad de Hölder, desigualdad de Minkowski, espacios ℓ^p y L^p.

1 Proposición (criterio de monotonía de una función, en términos de su derivada, repaso)**.** *Sea A un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ tal que f es continua en A y derivable en* $\operatorname{int}(A)$*. Entonces f es creciente en A (en el sentido no estricto) si, y solo si, $f'(x) \geq 0$ para cada x en* $\operatorname{int}(A)$*.*

2 Proposición (condición suficiente para la monotonía estricta de una función, en términos de su derivada, repaso)**.** *Sea A un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ tal que f es continua en A y derivable en* $\operatorname{int}(A)$*. Supongmaos que $f'(x) > 0$ para cada x en* $\operatorname{int}(A)$*. Entonces f es estrictamente creciente en A.*

3 Proposición (desigualdad de Bernoulli para exponentes no enteros)**.** *Sean $a \geq 0$, $b \geq 1$. Entonces*

$$(1+a)^b \geq 1 + ab.$$

Demostración. Consideremos la función

$$f(x) \coloneqq (1+x)^b - 1 - bx.$$

Entonces

$$f'(x) = b(1+x)^{b-1} - b = b\left((1+x)^{b-1} - 1\right).$$

Como $1 + x \geq 1$ y $b - 1 \geq 0$, tenemos $(1+x)^{b-1} \geq 1$. Luego $f'(x) \geq 0$, asi que la función f crece en el intervalo $[0, +\infty)$. Además, $f(0) = 0$. Por consecuencia, $f(x) \geq 0$ para cada $x \geq 0$. □

4 Proposición (el caso de igualdad en la desigualdad de Bernoulli para exponentes no enteros)**.** *Sea $b > 1$ y sea $a \geq 0$ tal que*

$$(1+a)^b = 1 + ab.$$

Entonces $a = 0$.

Demostración. Usamos la función f de la demostración de la Proposición 5. Ahora $f'(x) > 0$ para cada $x > 0$, por eso f es estrictamente creciente, y la igualdad $f(x) = 0$ se alcanza solamente en el punto $x = 0$. $\square$

5 Proposición (desigualdad de Young)**.** *Sean* $p, q > 1$ *tales que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, y sean* $a, b \geq 0$*. Entonces*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demostración. Si $a = 0$ o $b = 0$, entonces la desigualdad se cumple. Supongamos que $a > 0$ y $b > 0$. Pongamos $u = a^p$, $v = b^q$. Consideremos el caso $v \geq u$ (el otro caso es similar). Escribimos u/v como $1 + pt$, es decir, pongamos

$$t := \frac{1}{p}\left(\frac{u}{v} - 1\right).$$

Entonces

$$\begin{aligned} ab &= u^{1/p} v^{1/q} = \left(\frac{u}{v}\right)^{1/p} v = (1 + pt)^{1/p}\, v \\ &\leq ((1+t)^p)^{1/p}\, v = (1+t)\, v = \left(1 + \frac{1}{p}\frac{u}{v} - \frac{1}{p}\right) = \frac{v}{q} + \frac{u}{p} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \end{aligned}$$ $\square$

6 Proposición (el caso de igualdad en la desigualdad de Young)**.** *Sean* $p, q > 1$ *tales que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, y sean* $a, b \geq 0$*. Supongamos que*

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Entonces $a^p = b^q$*.*

Demostración. Si $a = 0$ o $b = 0$, entonces la igualdad $a^p = b^q$ se cumple. Supongamos que $a > 0$ y $b > 0$. Como en la demostración anterior, pongamos $u := a^p$, $v := b^q$. Consideremos el caso $v \geq u$. Revisando la demostración anterior, observamos que la igualdad es posible solamente si

$$1 + pt = (1 + t)^p.$$

Por la Proposición 4, $t = 0$, es decir, $u = v$. $\square$

Hay muchas otras demostraciones de la desigualdad de Young. En mi opinión, la más natural es la demostración basada en la convexidad de la función exponencial. Sin embargo, esta demostración necesita varias herramientas auxiliares, incluso el criterio de convexidad en términos de la segunda derivada.